

〔共同研究：コンピュータ利用による計量モデルの研究〕

## 多目的計画法による“最適な線型多重均衡 デシジョン”について\*

山本紀徳\*\*, 高井孝之\*\*\*

### 1 序

さきに、筆者らの一人は、次のような内容をもつ共同的デシジョン・システム、すなわち

(1) 複数個のデシジョン主体が、それぞれデシジョン変数を有する。

(2) それらのデシジョン主体のデシジョンは相互に影響を及ぼし合い、その共同的デシジョン・システムにおいてある一定の結果を生み出す。

(3) それぞれのデシジョン主体は、それぞれ複数の評価関数を有していて、上述の結果に対してその評価関数により多面的な評価を下す。条件を設定し、この共同的デシジョン・システムにおける合理的な共同デシジョンとして“多重均衡デシジョン”を導入した。<sup>1)</sup> この“多重均衡デシジョン”とは、あるデシジョン主体にとって、もしもすべてのデシジョン主体のデシジョンが不変であると見なす限り、自らのデシジョンを変更することがいわゆるパレートの意味からの比較において、自らに評価上の何らのプラスをももたらさない共同的デシジョンをさす。<sup>2)</sup> このことから、それは非協力ゲームの理論におけるナッシュ (Nash) 解<sup>3)</sup> の自然な拡張になっていることがわかる。

また、この“多重均衡デシジョン”は、たとえば線型環境のもとでは、あるパラメトリック

な極値問題を解くことにより求めることができるのである。この場合、パラメーターは各主体がそれぞれにもつ複数の評価関数に対するウエイト・パラメーターとして与えられる。いま、あるウエイト・パラメーターを与えて解が得られたとしよう。その解に対してそれぞれのデシジョン主体がもつ複数個の評価関数による評価に照らし合わせた場合に、各主体におけるそれぞれの評価が各主体においてもつ相対的重要度は、複数個の評価関数をスカラー化させる、各主体ごとの多重目的選好関数を導入することによって決定される。この各評価の相対的重要度と先のウエイト・パラメーターとは一般には一致しない。しかしながら、もしも両者が一致するような解があるとするならば、その解のもつ上述の性質からみて、それはさらに一層合理的な共同デシジョンであるということができであろう。そのような解＝“最適な線型多重均衡デシジョン”が数学的に存在することが保証されており、また求解の方法として、不動点定理における不動点を求めるアルゴリズムとリニア・プログラミングの解法とを結合させることが提唱されている。<sup>4)</sup>

求解の方法の技術的な側面に関していえば、デシジョン主体の数が複数個である場合の方法と、デシジョン主体がただ一つの場合の方法との間には、不動点を求めるという観点からみれば、両者にはそれほど本質的な差異は存在しない。もちろん、共同的デシジョンの内容は、デシジョン主体の数が複数個の場合とただ一つの場合とでは決定的な差異が生ずる。たとえば、後者の場合われわれの“最適な線型多重均衡デ

\* 本稿のための種々の計算は、京都大学大型計算機センターを利用して行われた。

\*\* 本学経営学部教授。

\*\*\* 京都大学大型計算機センター。

1) 山本 [10], 82—87ページ。

2) 同上, 84—85ページ。

3) Nash [5].

4) 山本 [10], 90—97ページ。

シジョン”は、いわゆる多目的計画法の解の中のある解と一致するのである。しかし、デシジョン主体の数がただ一つの場合に対する求解の具体的な方法が解明されるならば、上述のように、その方法はデシジョン主体の数が複数個である場合にも適用することができるのである。

本稿は、とくにデシジョン主体の数を一つに限った場合に、小型のデシジョン・システムモデルを素材として、上述の“最適な線型多重均衡デシジョン”（以下、本稿では「OLMED 解」と略称することとする）をコンピュータによって具体的に求める方法について論じた。

ところで、この「OLMED 解」は一般に複数個あり、われわれのコンピュータ・プログラムではその中の一つを求めることになった。

いま、「OLMED 解」の一つとして得られたものを、以下「解」と称えるならば、たとえば、複数の評価にかんする相対的重要度を決定する多重目的選好関数が増加したとき、この「解」がどのように変化していくのかを検討することも別の重要な論点となるであろう。具体的にいえば、ある多重目的選好関数に対して、 $x^1$  および  $x^2$  という「OLMED 解」があったとして、そのときの上述の「解」が  $x^1$  であったとしよう。いま、多重目的選好関数がわずかに変化して、そのときの「OLMED 解」が  $x^1$  および  $x^2$  などであったとする。このとき「解」としてやはり  $x^1$  が求められれば、それは望ましいことであるといえる。

以下の素材となった小型のデシジョン・システムモデルにおいて、われわれのコンピュータ・プログラムではごく短い CPU タイムで「解」を求めることが示された。また、多重目的選好関数をさまざまに変化させたときに得られる「解」の検討を行ったが、上述の意味で望ましい結果が得られた。

以下、セクション 2 では素材とするデシジョン・システムのモデルを導入する。セクション 3 では、「OLMED 解」を求めるアルゴリズムについて説明を行う。また、セクション 4 ではコンピュータによる計算結果を検討する。

## 2 デシジョン・システムのモデル

デシジョン主体の数は一つとし、この主体のデシジョン変数を

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

とする。デシジョン変数間には次のような制約条件が課せられている。

$$(2-1) \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

また、デシジョン主体はデシジョンを行ったときに生ずる結果に対して、次の  $k$  個の要素からなる多重目的関数により結果を評価する。

$$f = (f_1(x), \dots, f_k(x))$$

$$(2-2) \quad f_1(x) = c_1 \cdot x, \dots, f_k(x) = c_k \cdot x$$

$$c_i = (c_i(1), \dots, c_i(n)) \quad (i=1, \dots, k)$$

(2-1) および (2-2) に対して、“多重均衡デシジョン”は、いわゆる多目的計画法の解（パレート解）そのものとなる。すなわち、

$$(2-3) \quad f(x) \rightarrow \max!!$$

$$s. \ t \ to \ Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

という、ベクトル最大化問題の解であり、それらは次のパラメトリックなリニア・プログラミングの問題を解くことにより得られる。

$$w_1 f_1(x) + \dots + w_k f_k(x) \rightarrow \max!!$$

$$(2-4) \quad s. \ t \ to \ Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

$$w_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

さらに、デシジョン主体は上述の多重目的関数における  $k$  個の要素に対して、相対的重要度を決定するために、次の多重目的選好関数を有しているものとする。

$$M(f(x)) = M(f_1(x), \dots, f_k(x))$$

$$(2-5) \quad = \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^k m^{st} f_s(x) f_t(x) + \sum_{r=1}^k n^r f_r(x) + o(m^{st}, n^r, o \text{ はそれぞれ定数とする。})$$

ただし、

$$(2-6) \quad \partial M / \partial f_i |_{x} > 0 \quad (i=1, \dots, k)$$

とする。

また、

$$(2-7) \quad (\partial M / \partial f_j |_{x}) / (\sum_{i=1}^k \partial M / \partial f_i |_{x}) = v_j(x)$$

とする。(2-6) より

(2-8)  $v_j(x) > 0, j=1, \dots, k, \sum_{i=1}^k v_j(x) = 1$   
 である。

このとき、「OLMED 解」 $x^*$ は、次の二つの条件を満たすものである。<sup>5)</sup>

① (2-4) のパラメータ  $w_1, \dots, w_k$  に対する最適解になっている。

②  $x^*$  という最適点で、(2-7) によって  $v_j(x^*)$  を評価した場合

$$w_j = v_j(x^*) \quad (j=1, \dots, k)$$

が成り立っている。

以下で、この「OLMED 解」を計算するため次のような具体的な設定を行う。

s. t to

$$(2-9) \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 &\leq 16 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + x_7 &\leq 16 \\ -x_1 + x_3 + 2x_5 - 2x_7 &\leq 16 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 - x_7 &\leq 16 \\ x_i &\geq 0 \quad (i=1, \dots, 7) \end{aligned}$$

この多目的計画法の解は、前述のように、目標関数を

$$(2-10) \begin{aligned} f_3(x) + w_1(f_1(x) - f_3(x)) \\ + w_2(f_2(x) - f_3(x)) \end{aligned}$$

として、 $w_1$  および  $w_2$  をさまざまに変化させる ( $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_1 + w_2 = 1$ ) ことによって得られるのであるが、 $w_1$  および  $w_2$  の値によ

EQUATIONS

- (1)  $w_1 + w_2 = 1$
- (2)  $3w_1 + 2w_2 = 2$
- (3)  $3w_1 + 6w_2 = 4$
- (4)  $-3w_1 + 6w_2 = 2$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

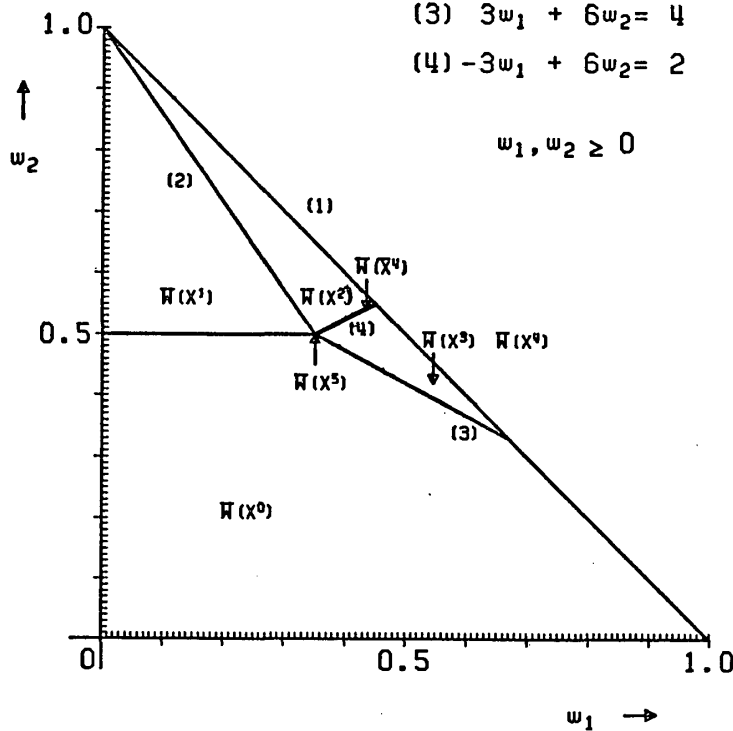


FIG. 2. 1

まず、多目的計画法の問題 (2-3) として、ゼルニーの問題を取り上げてみる。<sup>6)</sup>

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 \\ f_2(x) &= x_1 + x_3 - x_4 - x_6 - x_7 \\ f_3(x) &= x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 \end{aligned}$$

って解がどのように変化するかを図示したのが FIG. 2. 1 である。<sup>7)</sup> この図では、

$$(2-11) \begin{aligned} x^0 &= (0, 0, 0, 16, 0, 0, 0) \\ x^1 &= (16, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ x^2 &= (8, 0, 8, 0, 0, 0, 0) \\ x^3 &= (0, 0, 32/3, 16/3, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

5) 山本[10], 90-94ページ。

6) Zeleny [8], p. 43.

7) Ibid., p. 59. にもとづいている。

$$x^4 = (0, 0, 16/3, 0, 16/3, 0, 0)$$

$$x^5 = (0, 0, 0, 0, 8, 0, 0)$$

を示し、 $\bar{W}(x^i)$  ( $i=0, \dots, 5$ ) は、 $x^i$  が (2-9) および (2-10) の解たらしめる  $(w_1, w_2)$  の集合を示している。ゼルニーは、(2-9) の問題におけるすべてのパレート解を求める場合、それらをパラメトリックな方法で求めているのではなく、独自のコンピュータ・プログラムを開発してそれらを求めている。<sup>8)</sup> われわれは、参考のためにそのプログラムを用いて計算を行ったところ、CPU タイムは、0.40 sec という結果であった。

次に、「OLMED 解」の求解のために、

(2-5) の多重目的選好関数  $M(f(x))$  を

$$M(f(x)) = \mu(f_1(x) + \alpha_1)^2$$

(2-12)  $+\nu(f_2(x) + \alpha_2)^2$

$$+(1-\mu-\nu)(f_3(x) + \alpha_3)^2$$

と設定した。ただし、 $\mu, \nu$  はともに1より小さい正の数で、かつ、0.1, 0.2, ...の値をとるが、 $\mu$  および  $\nu$  の上限は  $\mu+\nu=0.9$  までとするように変化させることとした。このことは合計36通りの多重目的選好関数を想定することにはほかならない。以上のような  $\mu$  および  $\nu$  についての変動を考える根拠は、次のとおりである。

(i)  $\mu$  および  $\nu$  の値に応じて、一般に「OLMED 解」は、複数個ある場合がある。そのとき以下のセクション3に述べるコンピュータ・プログラムにより計算をして得る「解」は、複数個ある「OLMED 解」のうち実際にどれを求めたかを調べること。

(ii)  $\mu$  および  $\nu$  は、たとえば、ポリシー・メーカーの複数個の目標についてのウエイト付けであると考えられる。この、ポリシー・メーカーのウエイト付けの僅かな変動が、コンピュータ演算の結果得られる「解」の変動とどのような関連をもつのかを調べること。なお、(2-12) で  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ) は、

$M(f(x))$  に関する (2-6) の条件が満たされるように、すなわち、すべてのパレート解  $x$

での評価

$$\partial M / \partial f_i |_x > 0 \quad (i=1, \dots, 3)$$

が成立するように、各  $f_i(x)$  に定数項を加えて調整したものである。<sup>9)</sup> このように  $f_i(x)$  に定数項を加えて修正したときの多目的計画法の解は、修正前の多目的計画法の解と全く同一であることは明らかである。

$M(f(x))$  をこのように定めた場合、FIG. 2.1 で示されるパラメトリックなリニアール・プログラミングにおける最適解、すなわち多目的計画法の解を既知とすれば、 $\mu$  および  $\nu$  の組合せに応じて、「OLMED 解」を求めることができる。それらを表にしてまとめたものが Table 2.1 である。この表は次のようにして作られる。いま、 $\mu$  および  $\nu$  が与えられたとする。多目的計画法の解  $x^0 \sim x^5$  に関して

$$v_1(x^i) = \mu(f_1(x^i) + \alpha_1) / G(x^i)$$

$$v_2(x^i) = \nu(f_2(x^i) + \alpha_2) / G(x^i)$$

$$(2-13) \quad v_3(x^i) = 1 - v_1(x^i) - v_2(x^i)$$

$$G(x^i) = \mu(f_1(x^i) + \alpha_1)$$

$$+\nu(f_2(x^i) + \alpha_2)$$

$$+(1-\mu-\nu)(f_3(x^i) + \alpha_3)$$

をそれぞれ算出する。もしも  $(v_1(x^i), v_2(x^i))$  の組が、FIG. 2.1 の  $\bar{W}(x^i)$  に属していれば、 $x^i$  は「OLMED 解」となっているのである。

例えば、 $\mu=0.1, \nu=0.1$  の場合、多目的計画法の解の一つである  $x^0$  に対して

$$v_1(x^0) = 37/129 = 0.074$$

$$(2-14) \quad v_2(x^0) = 39/129 = 0.078$$

$$v_3(x^0) = 53/129 = 0.848$$

である。

一方、多目的計画法の解が  $x^0$  であるためには、

$$w_1 + w_2 \leq 1$$

$$3w_1 + 6w_2 \leq 4$$

$$(2-15) \quad w_2 \leq 1/2$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$$

という、パラメトリックなリニアール・プログラ

8) *Ibid.*, pp. 205-220.

9) 以下の計算例では、 $\alpha_1=5, \alpha_2=55, \alpha_3=5$  とした。

Table 2. 1

$\nu$	0.8	1, 2							
	0.7	1	1, 2						
	0.6	1	1, 2	1, 2					
	0.5	0, 1	0, 1	0, 1, 2	1, 2				
	0.4	0, 1	0, 1	0, 1, 2	0, 1, 2	0, 1, 2			
	0.3	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1, 2	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4		
	0.2	0	0	0, 1	0, 1, 2	0, 1, 2	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4	
	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0, 1
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
	$\mu$								

注: 数  $i$  は「OLMED 解」 $x^i$  を示している。(  $i=0, 1, 2, 3, 4$  )

ミングにおける目標関数の係数値が対応している。

(2-14) の  $v_1(x^0)$  および  $v_2(x^0)$  の値を、それぞれ  $w_1$  および  $w_2$  と読みかえて、(2-15) に代入した場合、4つの不等式を満たしていることがわかる。それ故、 $\mu=0.1, \nu=0.1$  の場合には、多目的計画法の解  $x^0$  は、同時に、「OLMED 解」になっていることがわかる。なお、Table 2. 1 では解  $x^5$  が含まれていないけれども、これは  $x^5$  が「OLMED 解」であるのは、たとえば、 $\mu=1/3, \nu=1/2$  の場合であるといった事情によるものである。このように、一般に「OLMED 解」は唯一つとは限らないことがこの表からも読み取れる。

### 3 「OLMED 解」の計算方法

「OLMED 解」、すなわち、“最適な線型多重均衡デジジョン” は、次の点对集合写像  $\phi$

$$(3-1) \phi = \varphi \circ \rho$$

の不動点をもとにして得られる。

ここに、 $\rho$  は、パラメトリックなリニア・プログラミング (2-4) における、目標関数の係数の集合である  $W$

$$(3-2) W = \{(w_1, \dots, w_k) \mid$$

$$w_i \geq 0, i=1, \dots, k, \sum_{i=1}^k w_i = 1\}$$

を定義域とし、パラメトリックな係数に対応するリニア・プログラミングの最適解  $x^*$  をその像とする、点对集合写像である。すなわち、

$$(3-3) \rho : W \rightarrow R_n^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid$$

$$x_i \geq 0, i=1, \dots, n\}$$

である。

また写像  $\varphi$  は、写像  $\rho$  の像である  $x^*$  に対して、(2-7) による、多重目的関数における  $k$  個の要素の、 $x^*$  における相対的重要度  $(v_1(x^*), \dots, v_k(x^*))$  を決定するものであり、

$$(3-4) \varphi : R_n^+ \rightarrow V$$

である。ここに  $V$  は、

$$(3-5) V = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_j > 0, j=1, \dots, k, \sum_{j=1}^k v_j = 1\}$$

それ故、「OLMED 解」を実際に計算するためには、不動点を求める手順およびリニア・プログラミングにより解を求める手順とが結合されなければならない。前者の不動点を求めるアルゴリズムについては、スカーフ,<sup>10)</sup> イーヴ

10) Scarf [6].

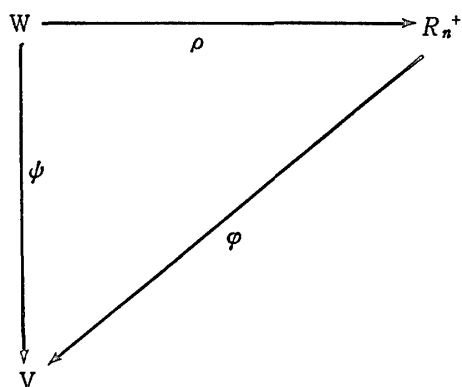


FIG. 3. 1

ァス,<sup>11)</sup> メリル,<sup>12)</sup> イーヴァス-サイガル<sup>13)</sup>などが開発した手法がある。以下のわれわれの計算では、イーヴァスの手法について計算上での改良を加えた、ヤンセン-ルーターの開発による FORTRAN コンピュータ・プログラムを使用することとした。<sup>14)</sup> この方法についての説明は、次の小セクション 3-1 で行う。

また、リニア-プログラミングの求解にあたっては、京都大学大型計算機センターのプログラム・ライブラリにある、板倉秀清氏作成の「線型計画法とパラメトリック線型計画法 LIN PRD (倍精度)」を利用した。<sup>15)</sup> このアルゴリズムと不動点を求めるアルゴリズムとの結合については、小セクション 3-2 で説明を行うこととする。

3-1 ヤンセン-ルーターのアルゴリズム

S を単位単体、すなわち

$$(3-1-1) S = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

とする。写像 phi は S から S への点対集合写像であるとして、ブラウアーの定理<sup>16)</sup> の条件を満たしているものとする。

$$(3-1-2) \phi(x) = x$$

を満たす x を、写像 phi の不動点という。不動点 x の近似的な解を見いだすのが目的であるが、そのためにまず、単位単体 S を細かく分割する。

S で定義されたレギュラー・グリッド (regular grid) として、集合  $RG(N)$

$$(3-1-3) RG(N) = \{x = (m_1, \dots, m_n) \mid 1/N \mid m_i; \text{非負の整数}, \sum_{i=1}^n m_i = N\}$$

を考える。通常 N は  $2, 2^2, \dots, 2^k, \dots$  などととる。  $N = 2^k$  のとき

$$(3-1-4) S_k = RG(N) \times 2^k = \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i; \text{非負の整数}, \sum_{i=1}^n m_i = 2^k\}$$

と定義する。

いま、集合 D および D' をそれぞれ次のように定義する。

$$(3-1-5) D = \{y = (y_1, \dots, y_n) \mid y_i > 0, i = 1, \dots, n\}$$

$$(3-1-6) D' = \{z = (z_1, \dots, z_n) \mid z \in D, \sum_{i=1}^n z_i \leq 2\}$$

このとき、集合 D の三角形分割 (triangulation) は、集合 D' の三角形分割を次のように拡大することによって得られる。<sup>17)</sup>

まず、D' の (n+1)-部分単体 tau は、(n+1) 個の頂点をそれぞれ  $s_i = (s_i^1, \dots, s_i^n), i = 1, \dots, n+1$  としたとき

$$(3-1-7) s^{i+1} = s^i + q(\gamma_i), i = 1, \dots, n$$

$$s^1 \in S_0 \text{ または } S_1$$

と表される。ここに  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  は数  $1, \dots, n$  のある順列であり、 $q(j)$  は次の  $n \times n$  行列

$$(3-1-8) \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ +1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & +1 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & \dots & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

の第 j 列目を示している。

それ故、tau は  $s^1$  および gamma によって次のように完全に記述される。

$$(3-1-9) \tau = \tau(s^1, \gamma)$$

11) Eaves [2].  
 12) Todd [7], pp. 82-94.  
 13) Eaves and Saigal [3].  
 14) Jansen and Louter [4].  
 15) [M 1], 114-128 ページ。  
 16) Brouer [1].

17) Eaves [2], pp. 12-16.

また、同様にして  $\sigma$  を  $S_k$  における  $n$ -単体とすれば、 $\sigma$  は次のように表現できる。

(3-1-10)  $\sigma = \sigma(r^i, \beta), r^i \in S_k$

ここに、

(3-1-11)  $r^{i+1} = r^i + p(\beta_i), i=1, \dots, n-1$  であり、 $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  は数  $1, \dots, n-1$  のある順列を示し、また  $p(j)$  は次の  $n \times (n-1)$  行列

(3-1-12) 
$$\begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ +1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & +1 \end{pmatrix}$$

の第  $j$  列目を示している。

このとき、 $D$  の  $(n+1)$ -単体  $\tau$  は、 $\sigma(r^i, \beta)$  および  $\tau(s^i, \gamma)$  により

(3-1-13) 
$$\tau = T_\sigma(\tau) = (T_\sigma(s^i), \dots, T_\sigma(s^{n+1})) \\ = (\sum_{i=1}^n r^i s_i^1, \dots, \sum_{i=1}^n r^i s_i^{n+1})$$

で表現することができる。

このように  $D$  の三角形分割の表現を得たのであるが、さらにイーヴェスは  $D$  の隣接する ( $n$

+1)-単体への移動、すなわち  $T_\sigma(\tau)$  から  $T_{\sigma'}(\tau')$  への移動をどのようにすべきかについて論じている。<sup>18)</sup> すなわち、イーヴェスは  $T_\sigma(\tau)$  の一つのベクトル  $T_\sigma(s^i)$  が取り除かれた場合に、新しいベクトルを生成する方法を提案するのである。この点に関して、ヤンセールーターが一つの改良を施した。<sup>19)</sup> 彼らの方法は FIG. 3. 2 のフロー・チャートに要約することができる。

この図で

- JMOUT:  $T_\sigma(\tau)$  で取り除かれるべきベクトルのインデックス
- JIN :  $T_{\sigma'}(\tau')$  に導入されるべきベクトルのインデックス
- $T^i$  :  $T_\sigma(\tau)$  の  $i$  番目のベクトル
- TIN :  $T_\sigma(\tau)$  における  $T^{JMOUT}$  を取り除いた後に  $T_{\sigma'}(\tau')$  に導入されるべきベクトル
- NRLH :  $\gamma_{NRLH} = n$

である。

いま、ある  $T_\sigma(\tau)$  を考える。 $T_\sigma(\tau)$  を (3-1-14)  $T_\sigma(\tau) = (X^1, \dots, X^{n+1})$  とする。 $T_\sigma(\tau)$  の要素  $X^j (j=1, \dots, n+1)$  に対して次のように同伴ベクトル (associated

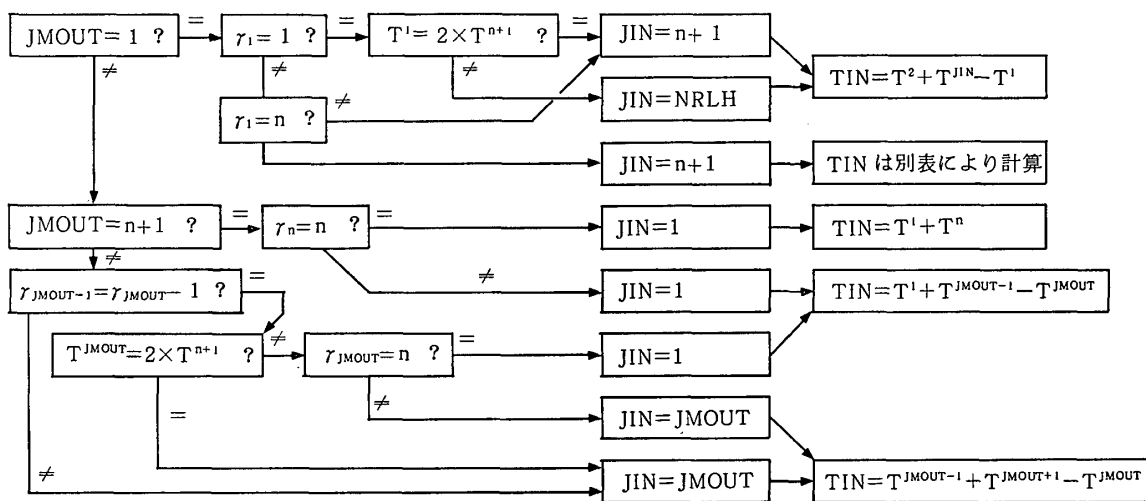


FIG. 3. 2<sup>20)</sup>

18) *Ibid.*, pp. 16—19.

19) Jansen and Louter [4], pp. 139—141, pp. 157—166.

20) Jansen and Louter [4], p. 140 にもとづいている。なお、図中の別表とは同論文、p. 136の表をさす。

vector) を定義する。

case 1  $X^j$  の要素がすべて正のとき、  
 $X^j$  の要素の和が  $K_j$  である場合。

$$a^j = f(X^j/K_j) - X^j/K_j + 1$$

case 2—1  $X^j$  の最初の零要素より後に現れる最初の非零要素が  $X_{k+1}^j$  ( $k+1 \leq n$ ) であるとき

$a^j = k$  番目の単位ベクトル

case 2—2  $X^j$  の最初の零要素より後に現れるすべての要素が零であるとき

$a^j = n$  番目の単位ベクトル

この  $(n+1)$  個の同伴ベクトルからつくられる行列  $A$  の列  $j_1, \dots, j_n$  が feasible な基底をつくるとき、すなわち、方程式

$$(3-1-15) Ay = \epsilon$$

$$\epsilon = (1, 1, \dots, 1)'$$

が、ユニークで、かつ、非負の解をもち、

$y_j = 0$  ( $j \neq j_1, \dots, j_n$ ) となっているとき行列  $(a^{j_1}, \dots, a^{j_n})$  を同伴行列 (associated matrix) という。

このとき、 $X^{j_1}, \dots, X^{j_n}$  を頂点とする単体の近傍の点と、不動点  $X$  とが対応することになる。それ故、不動点を求めるアルゴリズムは次のように与えられる。<sup>21)</sup>

step 0 初期値として

$$T_o(\tau) = (e^1, \dots, e^n, 0)$$

$$JMOUT = 1$$

$$\gamma_i = i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$AINV = (e^1, \dots, e^n)$ :  $AINV$  は同伴行列の逆行列を示す。

とする。

step 1 取替ステップを通じて、 $T_o(\tau)$  を  $T_o'(\tau')$  に変更する。

step 2 対応する同伴ベクトルを求める。

step 3 同伴ベクトルから構成される行列において、リニアール・プログラミングで用いられるピボット操作 (pivot operation) を行うことにより、 $(n+1)$  個の同伴ベクトルから取り除くべきベクトルを決定する。<sup>22)</sup> step 1 に戻る。

これらの演算は、グリッドの大きさを最初に設定し (たとえば  $2^{17}$ )、行列  $T_o(\tau)$  の第 1 列目のベクトルの要素の和がその大きさに達したときまでおこなわれる。そして、不動点の近似解として、行列  $T_o(\tau)$  における第 1 列目のベクトルのそれぞれの要素を、設定したグリッドの大きさで割ったものとするのである。

### 3—2 「OLMED 解」の求解

次に、「OLMED 解」を求める方法について考える。まず、「OLMED 解」に対応する不動点はすべての要素が正であることに注意しておく。二つのアルゴリズムの結合はつぎのように行われる。

- ① いま、 $T_o(\tau)$  のベクトルの取替ステップで、導入されるべきベクトル ITM が決定されたとする。そのとき、このベクトルの各要素をグリッドの大きさで割ったものを (3—2) における  $W$  の点とみることができ。
- ② ① で決定された  $W$  の点に対して、パラメトリックなリニアール・プログラミングの解を求め、その最適解を記憶させておく。
- ③ ② で求めた最適解に対して、(2—13) の算式にもとづき  $V$  の点を計算する。
- ④ ③ で決定された  $V$  の点により、同伴ベクトルを計算する。

以上のステップをヤンセーローターのコンピュータ・プログラムに追加することによって、写像  $\psi$  の不動点を求めると同時に、② で記憶されているリニアール・プログラミングの最適解、すなわち、「OLMED 解」を得ることができるのである。

以下のコンピュータ・プログラムは、ヤンセーローターの不動点を求めるプログラムにおいてそのサブルーチン LABELF —— 同伴ベクトルを計算するためのサブルーチン —— に「OLMED 解」を求めるためのサブルーチン VCAL および VCAL の中でのサブルーチン ITAKLP を追加する方法を示したものである。

サブルーチン VCAL では、次の処理を行う。

(i) 上記①での  $W$  の点を計算すること。

(ii) 上記②での、リニアール・プログラミン

21) *Ibid.*, pp. 147—154.

22) *Ibid.*, pp. 141—143.



```

SUBROUTINE LABELF(ITM,NP1,AIN,VX,GRID,X,W1,W2,W3,A,
*N,NN,M,MM,IOB,LP,IP,EPS,Z,NS,ERR,IB)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION ITM(40),AIN(40)
DIMENSION VX(3),X(7),A(6,13),M(3),IB(6)
C
C*****
C* ASSOCIATE LABEL TO INTERIOR VECTOR *
C*****
C
  NGRID = 0
  DO 10 I = 1, NP1
    NGRID = NGRID+ITM(I)
10  CONTINUE
    GRID = NGRID
    CALL VCAL(ITM,VX,NP1,GRID,X,W1,W2,W3,A,
*N,NN,M,MM,IOB,LP,IP,EPS,Z,NS,ERR,IB)
    DO 30 I = 1, NP1
      AIN(I) = (VX(I)-DFLOAT(ITM(I)))/GRID+1.D0
30  CONTINUE
    RETURN
  END

SUBROUTINE VCAL(ITM,VX,NP1,GRID,X,W1,W2,W3,A,
*N,NN,M,MM,IOB,LP,IP,EPS,Z,NS,ERR,IB)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION ITM(40)
DIMENSION VX(3),X(7),PVX(3),A(6,13)
DIMENSION M(3),IB(6)
DO 15 I = 1, NP1
15  PVX(I) = DFLOAT(ITM(I))/GRID
  A(5,1)=          PVX(2)          +PVX(3)
  A(5,2)=    PVX(1)          +2.D0*PVX(3)
  A(5,3)=    PVX(1)    +PVX(2)    -PVX(3)
  A(5,4)=2.D0*PVX(1)    -PVX(2)+3.D0*PVX(3)
  A(5,5)=3.D0*PVX(1)          +2.D0*PVX(3)
  A(5,6)=    PVX(1)    -PVX(2)
  A(5,7)=    -PVX(2)          +PVX(3)
  CALL ITAKLP(N,NN,M,MM,A,IOB,LP,IP,EPS,Z,X,NS,ERR,IB)
  DO 50 I = 1, 7
    IF(X(I).LT.1.D-7)X(I)=0.D0
50  CONTINUE
  VV1=W1*(          X(2)+X(3)+2.D0*X(4)+3.D0*X(5)+X(6)          +5.D0)
  VV2=W2*(X(1)          +X(3)          -X(4)          -X(6)-X(7)+55.D0)
  VV3=W3*(X(1)+2.D0*X(2)-X(3)+3.D0*X(4)+2.D0*X(5)          +X(7) +5.D0)
  VV7=VV1+VV2+VV3
  VX(1) = VV1/VV7
  VX(2) = VV2/VV7
  VX(3) = VV3/VV7
  DO 30 I = 1, NP1
30  VX(I) = VX(I)*GRID
  RETURN
  END

```

グの最適解を求めるサブルーチン ITAKLP に対して、引き渡すべき目標関数の係数値を計算する。

- (iii) (ii) で得られた最適解をもとに、上記③のVの値を計算し、同伴ベクトルを計算するサブルーチン LABELF にそれらを引き渡す。

サブルーチン ITAKLP では、リニアール・プ

ログラミングの最適解をもとめる。

主な変数名とその内容は、次のとおりである。

NP1 : ベクトルの次元の数。NP1 = 3

ITM (I) : 取替ステップの後に行列

$T_o(\tau)$  に導入されるべきベクトル  
(①参照)

AIN (I) : 取替ステップの後に同伴行列  
に導入されるべき同伴ベクトル

(④参照)

PVX (I) :  $W$  の値 (①参照)

A (5, J) : パラメトリックなりニアール・プログラミングにおける目標関数の係数 (②参照)

X : パラメトリックなりニアール・プログラミングにおける最適解 (②参照)

VX (I) :  $V$  の値 (③参照)

#### 4 計算結果

われわれは、前のセクションで与えたコンピュータ・プログラムを、セクション2のモデルに適用することによって、「OLMED 解」の一つを求めることにした。その際、(2-12)の多重目的選好関数については、合計36通りのバリエーションがあるが、それぞれの場合について独立に、かつ、一括して計算を行った。また、グリッド・サイズは $2^7$ としてある。

この36通りの計算処理に要した CPU タイムは0.64 sec であった。また、不動点の近似解の誤差は、平均で $0.582 \times 10^{-6}$ であり、イタレー

ション数は、平均で53.9回という結果であった。

Table 4. 1 は、多目的計画法のパレート解を既知としてあらかじめ「OLMED 解」を図表化した、Table 2. 1 を再掲し、同時に、コンピュータによる計算で得られた「解」を特に○印で囲んで示したものである。

$\mu$  および  $\nu$  の値に応じて、「OLMED 解」は複数個になる場合がある。われわれのコンピュータ・プログラムによる計算では、これら複数個の「OLMED 解」のうち、 $x^0$  が「解」として求められる割合が相対的に高い。これとは対照的に、 $x^1$  と  $x^2$  に関してはほぼ同じ割合でそれらが「解」として求められることが表から読み取ることができる。

われわれの計算は、 $\mu$  および  $\nu$  が変化するたび毎に初期化を行って処理をするものであった。Table 4. 1 によってわかるように、この計算方法によれば  $\mu$  および  $\nu$  の僅かな変化に応じて、複数個の解の中からある「解」を選ぶ際に、ややラフな表現であるが、その選び方には一定の連続性があることが示されているといつてよいであろう。このことは、「OLMED 解」を求め

Table 4. 1

$\nu$	0.8	①, 2									
	0.7	①	①, 2								
	0.6	①	①, 2	1, ②							
	0.5	①, 1	①, 1	①, 1, 2	1, ②						
	0.4	①, 1	①, 1	①, 1, 2	①, 1, 2	①, 1, 2					
	0.3	①, 1	①, 1	①, 1	①, 1, 2	①, 1, 2, 3, 4	①, 1, 2, 3, 4				
	0.2	①	①	①, 1	①, 1, 2	①, 1, 2	①, 1, 2, 3, 4	①, 1, 2, 3, 4			
	0.1	①	①	①	①	①	①	①	①	①, 1	
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7		
		$\mu$									

注: 1) 数  $i$  は「OLMED 解」 $x^i$  を示している。(  $i=0, 1, 2, 3, 4$  )  
 2) ○印は、コンピュータによる計算により得られた「解」を示している。

るわれわれの方法がもっている一つの利点であると考えられる。つまり、 $\mu$  および  $\nu$  の変化 = ポリシー・メーカーの多面的評価に関するウェイト付けの変化であると考えれば、ポリシー・メーカーの主観的評価の僅かな変動の結果、本来ならば変動前の「解」も変動後における一つの解であるにもかかわらず、得られた「解」が変動前の「解」からドラスティックに変化したものであるという事態が発生すれば、それはあまり好ましいとはいえないであろう。われわれの方法によれば、こうした事態を避けることができるであろう。

さらに、われわれの計算方法とゼルニーの提案した多目的計画法のパレート解を求める方法との関連についても若干ふれておきたい。デジジョン主体の数がただ一つの場合、すでにわれわれは、このゼルニーの方法によっても「OLMED 解」のすべてをシステムティックに求めることができるのを見てきた。とはいえ、あるパレート解  $x^i$  に対応する  $\bar{W}(x^i)$  ——パラメトリックなリニア・プログラミングにおける目標関数の係数の集合——を構成することは、計算上かなりの困難さを伴うものである。

実際、われわれがモデルとして取り上げたゼルニーの例において、たとえばパレート解  $x^0$  に対応する  $\bar{W}(x^0)$  を、クーン・タッカーの定理を適用しながら構成したとする。<sup>23)</sup> この場合、 $w = (w_1, w_2, w_3)$  と、もう一つの助変数  $\lambda \geq 0$ 、すなわち4つの変数に関して、合計7つの不等式<sup>24)</sup> が得られるが、これらのうち  $\bar{W}(x^0)$  を決定する不等式の数、計算によれば、本質的には2つであることがわかる。 $\bar{W}(x^i)$  を決定する場合、このように余分な (redundant) 制約

式が多いことが、計算上の困難さを引き起こす原因となる。<sup>25)</sup>

以上に述べてきたことは、われわれのコンピュータ・プログラムで「OLMED 解」を求めることがかなり実際的であることを示しているといえよう。

#### 参 考 文 献

- [1] Brouer, L. F., "Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten", *Mathematische Annalen*, 171, 1912, pp. 97-115.
- [2] Eaves, B. C., "Homotopies for Computation of Fixed Points", *Mathematical Programming*, 3, 1972, pp. 1-22.
- [3] Eaves, B. C. and R. Saigal, "Homotopies for Computation of Fixed Points on Unbounded Regions", *Mathematical Programming*, 3, 1972, pp. 257-237.
- [4] Jansen, R. and A. S. Louter, "An Efficient Way of Programming Eaves' Fixed Point Algorithm", in W. Forster (ed.), *Numerical Solution of Highly Nonlinear Problems*, North-Holland, 1980, pp. 115-167.
- [5] Nash, J. F., "Non-Cooperative Game", *Annals of Mathematics*, 54, 1951, pp. 286-295.
- [6] Scarf, H. "The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 15, 1967, pp. 1328-1343.
- [7] Todd, M., *The Computation of Fixed Points and Applications*, Springer, 1976.
- [8] Zeleny, M., *Linear Multiobjective Programming*, Springer, 1974.
- [9] 山本紀徳, 「最適経済計画の選好関数と境界条件」, 桃山学院大学『経済経営論集』16(2-3), 1974, 261-275ページ。
- [10] ——, 「計画における「民主性」と「自律性」」, 山本紀徳他『計画と市場』勁草書房, 1981, 61-118ページ。
- [M1] 京都大学大型計算機センター『利用の手引—プログラム・ライブラリ編』1980。

23) 適用の方法については、山本 [9], 266-269ページを参照。

24) 条件  $w_i \geq 0$ , ( $i=1, 2, 3$ ),  $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ , および  $\lambda \geq 0$  を除いてある。

25) Zeleny [8], p. 40.