〔共同研究：ことばと論理（II）〕

ユークリッド『原論』第7巻定義4における“$\mu\acute{\varepsilon}\rho\eta$”の概念

山　川　偉　也*

はじめに

共同研究「ことばと論理」6月28日研究会(「エレアのゼノン――その≪多≫の否定の論証について」に出席された三重大学教育学部上垣渉氏（数学史専攻）から，先日，相談を受けた。ユークリッド『原論』（共立出版）第7巻定義の部分に出てくる「約数和」なる概念についてで，上垣氏の言うところでは，この「約数和」というのは誤訳ではあるまいか，というものであった。この問題は，実のところかなり奥深いもので，ギリシア文化と日本文化の相違のみならず，ギリシア数学発展の経緯の問題もからんで，一筋縄ではいかないもののように思われる。が，この問題はまた「ことばと論理」にかかわるものでもあるので，上垣氏との議論のやりとりをも含めて，この間に考えたことの一端を紹介したいと考える。

I　上垣　渉氏による問題提起〔筆者への手紙の一部を掲載〕

3種のコピーをお送りします。1つは『原論』の日本語訳の中からで第7巻の定義の部分です。Def. 21 に「約数和」が出てきます。2つめは共立から1979年に出版された本で『ギリシアの数学』という本の中からのものです。第1章は「ユークリッド以前」と題され伊東先生が書かれ，第2章は「ユークリッド――『原論』第1巻を中心に――」と題され彌永先生が書かれ，第3章は「アルキメデス」と題して佐藤先生が書かれています。問題の箇所は第1章ですが，その部分をコピーしておきました。もう1つのコピーは『エピステーメー』という雑誌に伊東先生が書かれたものです。これは共立『ギリシアの数学』所収の伊東先生の論文とほとんど同じです。にもかかわらずコピーしましたのは，問題の箇所で『エピステーメー』では

「このような訳が与えられているのは世界でも初めてであろう」

となっている所が，『ギリシアの数学』では

「このような訳が与えられているのは初めてであろう」

となっていて，比べてみるとおもしろいと思ったからです。

さて，私が疑問に思ったのは次のような点についてです。『エピステーメー』でも『ギリシアの数学』でも同じ例があげられていますが，「7は20を割り切らない。その場合は7は20の約数である5と2の和になっている。」とされています。

また別の例では，「5は8を割り切らないが，5は8の約数4と1の和になっている」とされています。

つまり，上の主張は任意の場合について成立するように受け取られるのですが，実際は，

5は7を割り切らないから，5は7の約数の和として表されるか？

を考えてみればわかるように，常に成り立つとは限りません。

伊東先生のあげておられる例は都合の良いものだけのように思えて仕方ないのです。

6月28日の夜にお話したかったことは以上のようなことです。

＊本学文学部

II　山川偉也による暫定的回答（筆者の上垣氏への返書の一部）

「約数和」（$\tau\grave{\alpha}\ \mu\acute{\epsilon}\rho\eta$）の問題は「いささか複雑だ」，というのがわたくしの第一印象です。いま少し考えさせていただきたいと思います。……御指摘のとおり「5は7の約数和として表されうるか」という問かけに対して伊東氏は有効に答ええないであろう，と思います。伊東氏は明らかに誤訳しているのです。しかしわたくしには，問題はそう簡単でなく，古代ギリシア文化と日本文化のギャップの問題が控えている……そのギャップのために生じた翻訳上の問題がそこに底在していると思われます。では，そのギャップはどういう構造のものとして指摘されなければならないか，これを考える必要があると思われます。

III　資　料

①　共立出版『ユークリッド原論』(1971)，第7巻定義部分

1. 単位とは存在するもののおのおのがそれによって1とよばれるものである。
2. 数とは単位から成る多である。
3. 小さい数が大きい数を割り切るとき，小さい数は大きい数の約数である。
4. 割り切らないときには約数和である。
5. そして大きい数が小さい数によって割り切られるとき，大きい数は小さい数の倍数である。

……………………

12. 素数とは単位によってのみ割り切られる数である。

②　共立出版『ギリシアの数学』(彌永昌吉・伊東俊太郎・佐藤徹著，1979年）第1章（43～44ページ）

「さてこの数論の定義において注目すべきことは，1（$\acute{\epsilon}\nu$）は単位（$\mu o\nu\acute{\alpha}\varsigma$）であり，それ自身は数（$\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$）ではないということである。数とはこの単位から合成された多――すなわち2以上のものをいう。単位は数の究極的な構成要素であり，もはや分割不可能なものであり，単位から合成され分割可能な数とは原理的に区別される。

次に注意すべきは，定義3の約数の原語は $\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$（部分）の意味で，原義に数という意味は含まれていないが，文脈から言ってこれを“約数”と訳してよいであろう。しかし定義4におけるこの $\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$ の複数形は，ヒースがやっているように（T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclids Elements,* Vol. 2, New York (Dover), 1956, p. 208）“分数”と訳してはいけない。この点ではヒースは誤っていると思う。この定義3，4で言っていることの意味は次のようなことであろう。

4は20を割り切るから，4は20の約数（部分）である。このことには問題はない。ところで7は20を割り切らない。しかしその場合は，7は20の約数である5と2の和になっている。別の例を挙げれば，5は8を割り切らないが，5は8の約数4と1の和になっている。1を8の約数とするのは1はそもそも数ではないのだからおかしいと言われるかも知れないが，さきに述べたように約数の原語は $\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$ であり，数をつくっている部分であればよいのであり，1は単位として最も究極的な“部分”であると言えよう。

このようなわけで，ここでは $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$ に“分数”ではなく“約数和”の訳を与えている（邦訳『原論』(共立出版）の訳語。そこでは，はじめは“分数”となっていたが，筆者が異議をさしはさみ，共訳者たちでこの訳語を案出した。）このような訳が与えられているのは初めてであろうが，この訳の正当さは，定義23の完全数の定義のところでもピタリと当てはまり，また命題や証明のなかでも意味が通じることにより保証される（なお和を複数形で表わすのはギリシャ数学の表現において通常のことである)。もともとギリシャ数学には分数の概念はないというべきであろう。われわれが分数と言っているものは，ギリシャでは常に単位または数(われわれの自然数）の比である。分数の概念は単位の不可分性に

矛盾するものとして，ギリシャでは考えられていない。」(伊東俊太郎)

③ 『エピステーメー』1979年1月号（伊東俊太郎「ピュタゴラス学派の数論」）

「……μέρος の複数形 μέρη は，ヒースがやっているように“分数”と訳してはいけない。この点ではヒースは誤っていると思う。この定義3，4で云っていることの意味は次のようなことであろう。

4は20を割り切るから，4は20の約数（部分）である。このことには問題はない。ところで7は20を割り切らない。しかしその場合は，7は20の約数であると5と2の和になっている。別の例を挙げれば，5は8を割り切らないが，5は8の約数4と1の和になっている。1を8の約数とするのは1はそもそも数ではないのだからおかしいとはいえない。さきに述べたように約数の原語は μέρος であり，数をつくっている部分であればよいのであり，1は単位として究極的な「部分」である。

このようなわけで，ここでは μέρη に「分数」ではなく「約数和」の訳を与えている。このような訳が与えられているのは世界でも初めてであろう。この訳の正当さは，定義23の完全数の定義のところでもピタリと当てはまり，また命題や証明のなかでも意味が通じることにより保証される（なお和を複数形で表すのはギリシア数学の表現において通常のことである)。そもそもギリシャ数学には分数の概念はないというべきであろう。われわれが分数と云っているものは，ギリシャでは常に単位または数（われわれの自然数）の比である。分数の概念は単位の不可分性に矛盾するものとして，ギリシャでは考えられていない。」

IV 伊東俊太郎氏の発言にみられる「約数和」概念の定義

上の資料にみられる「約数和」概念についての伊東氏の発言は，次のように一般化なされうるであろう。

約数和とは小さい数が大きい数を割り切らない場合の小さい数を言うが，その場合，一般的に，小さい数は大きい数の，1を含めた約数の和となっている。

V 考　察（1）—「約数和」の概念は矛盾を含むものであることを若干の事例によって示す。

(イ) 1) 3は5を割り切らない。
2) ゆえに，定義4により，3は5の約数和である。
3) 5の約数は5と1である。そして，5と1以外に5の約数はない。
4) ゆえに，伊東氏の定義によれば，6が5の約数和である。
5) ゆえに，2)と3)により，3=6 である。
6) 3は6の半分であり，6は3の2倍である。したがって，半分が2倍に等しい。
7) これは不合理である。
8) この不合理は「約数和」の定義から導き出された。ゆえに，「約数和」の定義は却下される。

(ロ) 1) 2は3を割り切らない。
2) ゆえに，定義4により，2は3の約数和である。
3) 3の約数は3と1である。そして3と1以外に3の約数はない。
4) ゆえに，伊東氏の定義によれば，4が3の約数和である。
5) ゆえに，2)と3)により，2=4 である。
6) 2は4の半分であり，4は2の2倍である。したがって，半分が2倍に等しい。
7) これは不合理である。
8) この不合理は「約数和」の定義から導き出された。ゆえに，「約数和」の定義は却下される。

VI 考　察（2）　伊東俊太郎氏の「約数和」概念の根底にある混乱を指摘する。

1) 上の(イ)(ロ)それぞれにおける 3)，すなわち「5の約数は5と1である」「3の約数は3

と１である」における「……１である」は，伊東氏の発言，

「……約数の原語は *μέρος* であり，数をつくっている部分であればよいのであり，１は単位として最も究極的な“部分”である」

によって正当化される。

2)「５の約数は５……」「３の約数は３……」に相当することについては伊東氏は何も言っていない。しかし，これを補わないと，そもそも「約数和」という概念そのものが成り立たないことになる。「約数和」という概念が定義４を満足させるものとして常に成り立つためには，任意の数の約数として当該の数自身を含めなければならないことになるのである。

3) しかるに，上例における「５の約数は５と１である」「３の約数は３と１である」のいずれもが，『原論』第７巻の他の定義との関連において不整合である。何故ならば，一方で５や３は素数であるが，５自身そして３自身は，ユークリッドによれば５および３の約数ではないからであり，他方，５および３のいまひとつの約数とされる１は，数ではないからである。何故ならば，

(1) 定義12によれば，「素数とは単位によってのみ割り切られる数」であるから，例えば３を割り切るものは１だけであって，３自身は含まれないことになり，他方，

(2) １は「単位」であって「数」ではないので，１は定義４にいう「〔小さい数が大きい数を〕割り切らないときには約数和である」における「小さい数」には該当せず，したがって１を「約数」とすることはユークリッドにおいては当初から排除されているからである。

4) つまり，ユークリッドは，

(3) 素数には〔定義３にいうところの〕いかなる約数（*μέρος*）も存在しない，

と考えているということである。それゆえにまた，彼は，伊東俊太郎氏のいう意味でのいかなる「約数和」も，素数には存在しないと考えているということにもなる。すなわち，

(4) 素数にはいかなる約数和も存在しないということである。したがって，それの約数（*μέρος*）が存在しない数，すなわち素数については，伊東氏のいう「約数和」なるものは存在しようがないのである。

VII 『原論』第７巻定義ギリシア語原典

以下の考察のために『原論』第７巻定義のうち，議論に関連する諸定義の原文を掲げておく。ただし，訳文は共立出版のものである。拙訳を与えないのは，以下の解釈において原文が伝えるものと訳文が含意するものとのギャップを際立たせるためであって，訳文に依拠しようがためではない。なお，定義17の訳文には，「二つの数が互いにかけあわせて……」という日本語として奇妙な表現がみられ，そのまま掲げるにはいささか抵抗を感ずるが，いま述べた解釈の方針にしたがってそのままにしておく。ただし，訳文の出来・不出来といったレベルのことにめくじら立て，あれこれと瑣末なことをあげつらう意図はわたしにはない。

1. *μονάς ἐστιν, καθ’ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.*
   （単位とは存在するもののおのおのがそれによって１とよばれるものである。）
2. *’Αριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.*
   （数とは単位から成る多である。）
3. *Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.*
   （小さい数が大きい数を割り切るとき，小さい数は大きい数の約数である。）
4. *Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.*
   （割り切らないときには約数和である。）
5. *Πολλαπάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.*
   （そして大きい数が小さい数によって割

り切られるとき，大きい数は小さい数の倍数である。）

……………………

12. *Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.*

（素数とは単位によってのみ割り切られる数である。）

13. *Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.*

（互いに素である数とは共通の尺度としての単位によってのみ割り切られる数である。）

14. *Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.*

（合成数とは何らかの数によって割り切られる数である。）

……………………

17. *Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.*

（二つの数が互いにかけあわせて何らかの数をつくるとき，その積は平面数であり，その辺は互いにかけあわせた数である。）

……………………

21. *'Αριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.*

（第１の数が第２の数の，第３の数が第４の数の同じ倍数であるか，同じ倍数であるか，または同じ約数和であるとき，それらの数は比例する。）

22. *Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.*

（相似な平面数および立体数とは比例する辺をもつ数である。）

VIII 考察（3）――第7巻定義における“*μερος*”と“*μερη*”の連関について①

ユークリッドによれば，「５の約数（*μέρος*）は５と１（*μονάς*）である」とか，「３の約数（*μέρος*）は３と１（*μονάς*）である」とか語るのは不合理だという理由を述べた。そしてその理由は，

(1) 素数（*πρῶτοι ἀριθμοί*）にはいかなる約数（*μέρος*）も存在せず（定義12）

(2) 多（*πλῆθος*）ならぬ１（*μονάς*）は数（*ἀριθμός*）ではない（定義２）

ということに基づくものであった。では，伊東氏のいう「約数和」という概念を含む次の命題

(3) 素数にはいかなる約数和も存在しない

もまた，正しい命題だと言うことができるであろうか。

素数がいかなる“*μέρος*”も持たないかぎりにおいて，この命題(3)も正しいとしなければならないであろう。ただしそれは，「約数和」が“*μέρος*”（約数）の和であると考えられるかぎりにおいてである。ところでしかし，この(3)命題の「約数和」に“*μέρη*”を置き換えた命題，

(4) 素数にはいかなる *μέρη* も存在しない

はユークリッド的に正しい命題であろうか。わたくしは正しいとは思わない。何故なら，素数は定義12により数であり，定義２により数は単位から成る多であるから，素数は単位から成る多である。そして，多であるかぎり，素数は諸部分（*μέρη*）をもつからである。しかし，すでに見たように，素数は定義３にいうところの“*μέρος*”をもたない。したがって，

(5) 素数は *μέρος* をもたないが，*μέρη* をもつ

ということになる。ところで(5)は，“*μέρος*”を「部分」，“*μέρη*”を「諸部分」と訳すかぎりにおいて

(6) 素数は部分をもたないが諸部分をもつ

という奇妙な命題を生み出すことになる。

IX 考 察（4）— 第7巻定義における“μέρος”と“μέρη”の連関について②

上に行なってきた考察は，ユークリッドにおける“μέρος”概念が体系的に二義的であることを示唆している。つまり，ユークリッドの“μέρος”概念には広狭二つの意味があるということである。そして，その広義における“μέρος”概念からすれば，たとえば

(1) 素数は“μέρος”をもつ

が，狭義におけるそれによれば，

(2) 素数は“μέρος”をもたない

ということになるのである。そして第7巻においてユークリッドは，はっきりと，狭義の“μέρος”概念を採用し，それを広義のものから厳密に区別しているのである。伊東氏は，ユークリッドのこの区別を無視した。そのことによって「約数和」という奇妙な概念を案出したのである。

さて，いま述べた“μέρος”の広狭二義の区別は，実はアリストテレス以前に遡るものである。そしてそのことをヒースは，*The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Vol. II, 1908 のなかでアリストテレスの言葉（*Met.* 1023 b 12）を引用しつつ正しく指摘している。その指摘は『原論』第5巻定義 1

> “*Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.*”

に関連してなされたもので，こう言っている（p. 115）：

> “The word part (*μέρος*) is here used in the restricted sense of a submultiple or an aliquot part as distinct from the more general sense in which it is used in the Common Notion (5) which says that “the whole is greater than the part.” It is used in the same restricted sense in VII. Def. 3, which is the same definition as this “number” (*ἀριθμός*) substituted for “magnitude.” VII. Def. 4, keeping up the restriction, says that, when a number does not measure another number, it is parts (in the plural), not a part of it. Thus, 1, 2, or 3, is a part of 6, but 4 is not a part of 6 but parts. The same distinction between the restricted and the more general sense of the word part appears in Aristotle, *Metaph.* 1023 b 12: “In one sense a part is that into which quantity (*τὸ ποσόν*) can anyhow be divided; for that which is taken away from quantity, qua quantity, is always called a “part” of it, as e. g. two is said to be in a sense a part of three. But in another sense a “part” is only what measures (*τὰ καταμετροῦντα*) such quantities. Thus two is in one sense said to be a part of three, in the other not.”

このヒースの発言において興味深いのは，彼が，“Thus, 1, 2, or 3, is a part of 6, but 4 is not a part of 6 but parts.”と言うことによって，“1”を“a submultiple or an aliquot part”に入れてしまっているという事実である。しかるに“1”は，『原論』第7巻定義3における“restricted sense”においては“μέρος”ではありえない。伊東氏と同じようにヒースもまた，近代人の数観念を無意識的にユークリッドのなかにもちこんでいるのである。

それはともかくとして，ヒース引用するところのアリストテレスの発言は原文では次のようになっている。

> “*Μέρος λέγεται ἕνα μὲν τρόπον εἰς ὃ διαιρετείη ἂν τὸ ποσὸν ὁπωσοῦν. ἀεὶ γὰρ τὸ ἀφαιρούμενον τοῦ πόσου ᾗ ποσὸν μέρος λέγεταί ἐκείνου, οἷον τῶν τριῶν τὰ δύο μέρος λέγεταί πως. ἄλλον δὲ τρόπον τὰ καταμετροῦντα τῶν τοιούτων μόνον. διὸ τὰ δύο τῶν τριῶν ἔστι μὲν ὡς λέγεται μέρος*

ἔστι δ᾽ ὡς ου.”

注目すべきこととして，2 が 3 の “μέρος” となる場合（広義の “μέρος”），ならない場合（狭義のそれ）いずれの場合も，2（δύο）が中性複数定冠詞 “τὰ” を有しているという事実がある。ギリシア人は中性複数形を，多くの場合，単数として意識した。そしてひとつの数は，それが量としてのかぎりにおける量をあらわすものとしては中性複数形で表現された。この事実は以下の推測を成り立たせる。すなわち，

(1) 一般に，より小なる数はより大なる数の部分（μέρος 単数）であるとギリシア人によって意識されていた

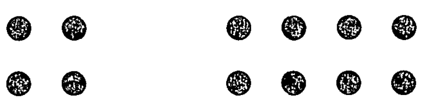
が，数相互の関係において，より小なる数がより大なる数を割り切る（καταμετρεῖν）か割り切らないかが意識的に問題にされるにいたったとき，

(2) 割り切る場合には，より小なる数はより大なる数の部分（μέρος）である

と理解するのはごく自然なことであった。そしてその自然さは，数論の領域において『原論』第 7 巻の偶数奇数論の形成に寄与した初期ピュタゴラス学派の数学者たちが，数論を展開するにあたって「小石をもって」（ταῖς ψήφοις Aristotle, *Metaph.* 1092 b 10）図形をつくった事情と重ね合わせるとき，「いっそう自然」（φυσικώτερον Iamblichus, 56. 27）なことと思われることであろう。何故ならば，例えば 4 や 8 は，彼らによって，一次元的に「線状」（γραμμικός）に並んだ点，図示すれば

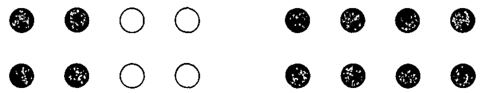
4 8

のようなものとしても，二次元的に幅（πλάτος）をもつ「面」（ἐπίπεδος），たとえば



4 8

のようなものとしても表象されたが，彼らのこのような思考法からすれば，4 を 2 倍したもの（4+4）が



4 8

8 であることは自明の理であったからである。そしてこの事実こそ一方では，先に見た定義17においてユークリッドが，

> Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασ άσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.
>
> 二つの数が互いにかけあわされて何らかの数をつくる，そのとき生ずるものは平面数と呼ばれるが，互いにかけあわされる数はその［平面数の］辺（複数）と呼ばれる。

と言った理由であるとともに，他方では，定義14において

> Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.
>
> 合成数とは何らかの数によって割り切られる数である。

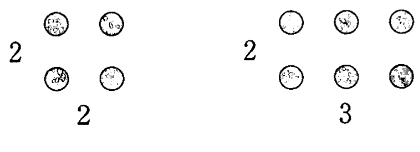
と言った理由でもある。

(i) 4 および 8 は一方ではそれぞれに平面数 2×2 ならびに 2×4 で，またそれぞれの辺は，4 の場合には 2，8 の場合には 2 と 4 であると了解されたからであり，他方で 4 と 8 はそれぞれにそれぞれの辺（πλευρά）2 と 4 によって割り切られるからである。ここに「辺」と呼ばれているものは，われわれのいう「因数」に相当するものだが，その「辺」がユークリッドのいう “μέρος” と重なりあうものであることはいまや明白であろう。何故なら，たとえば 8 はユークリッドのいう平面数 2×4 で，その辺は 2 と 4 とであるが，それらいずれの辺によっても割り切られる

からである。8は辺2および辺4の倍数となっている。8は2の4倍数（τετραπλάσιος）ないし4の2倍数（διπλάσιος）なのである（定義5を参照）。他方，辺2および辺4は，より小なる数としてより大なる数8を割り切る。したがってそれらはいずれも，8の“μέρος”である（定義3を参照）。すなわち，辺2の場合は，8の4分の1（ὑποτετραπλάσιος）部分（μέρος）であり，辺4の場合は，8の2分の1（ὑποδιπλάσιος）部分（μέρος）なのである。

しかし，μέρος というもののこのような理解を首尾一貫させようとするならば，割り切らない場合のより小なる数を，単数で「部分」（μέρος）と呼ぶことはもはやできないこととなる。何故ならば，割り切らない場合とは，より大なる数がより小なる数の倍数（πολλαπλάσιος）となっていない場合だからである。

(ii) けれども，より小なる数がより大なる数を割り切らない場合における次のような事情を考えてみよう。4と6の場合がたとえばそれである。6は4の倍数ではない。だから，4は6の“μέρος”ではない（定義3を参照）。しかし4と6は互いに合成的な数ではある。すなわちそれらは，それらに共通な尺度としての2によって割り切られ（定義15を参照），ゆえに4と6は互いに2という“μέρος”を共有していると言うことはできるのである（定義14，17を参照）。小石によってこれを図示し，辺の数をそれぞれの図形の脇に記すならば



のようになるだろう。この場合，4は6を2という共通の“μέρος”（＝辺＝πλευρά）で割ったものの二つ分，すなわち $6\times\frac{2}{3}\ \left[=6\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right]$ である。換言すれば，より大なる数6の3分の1（＝2）を“μέρος”として2つもつものが，数4だということである。したがって，6を割り切らない4という数は，6との関係において，単数の「部分」（μέρος）ではありえず，「諸部分」（μέρη）と呼ばれなければならなかったわけである（定義4を参照）。

さてしかし，より小なる数がより大なる数を割り切らない場合のより小なる数とより大なる数との関係は，上に例示した「互いに合成的な数」の場合だけではなく，定義13にいうところの

> Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
> 互いに素である数とは単位のみを共通尺度として割り切られる数である。

ケースをも含む。

(iii) たとえばより小なる数2とより大なる数3との関係がそういったケースである。先に挙げた4と6の場合と同様，2は3を割り切らない。2と3は互いに素な関係にある。ゆえに，それらを割り切るものは単位のみである（定義13を参照）。それらは共通の“μέρος”をもたない。しかし，このような場合についてもなお「諸部分」（μέρη）について語りうる。何故なら2は3との関係において，3を単位によって割ったものの2つ分 $\left[=\frac{2}{3}\right]$ に当たるからである。すなわち2は，3の $\frac{1}{3}$ を“μέρος”とするとき，3に対して，$\frac{2}{3}$ が $\frac{3}{3}$ に対する関係，つまり諸部分（μέρη）が全体（ὅλον）に対する関係にあると見ることができるからである。

Ⅹ 結　　論

“μέρος”と“μέρη”の連関について上に述べてきたことの妥当性は，第7巻命題4によって確証なされうる。命題4は任意の数について，より小なる数はより大なる数の「部分」（μέρος）であるか「諸部分」（μέρη）であるかである，と述べる。そしてその証明は大小2つの数が，

(1) 相互に素な関係にある場合

(2) 相互に素でない場合

を分け，さらに，(2)の相互に素でない場合を

① より小なる数がより大なる数を割り切る場合
② より小なる数がより大なる数を割り切らない場合

の2つに分けて，次のように行なわれている。

$A, B\Gamma$ を2つの数とし，$B\Gamma$ をより小なる数とせよ。わたくしは，$B\Gamma$ が A の部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$）であるか諸部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$）であるかだと主張する。

$A, B\Gamma$ は互いに素であるか素でないかのいずれかである。

(1) まず第一に，$A, B\Gamma$ が互いに素であるとしよう。そのとき，もしも $B\Gamma$ がその諸単位へと分割されるならば，$B\Gamma$ におけるそれらの単位の各々は，A のなんらかの単位であるだろう。したがって，$B\Gamma$ は A の諸部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$）である。

(2) 次に，$A, B\Gamma$ は互いに素ではないとしよう。そのとき，$B\Gamma$ は A を割り切るか，割り切らないかである。

①さて，もしも $B\Gamma$ が A を割り切るならば，$B\Gamma$ は A の部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$）である。

②しかし，もし割り切らないなら，$A, B\Gamma$ を共通に測る尺度のうち最大のもの〔＝最大公約数〕Δ が得られたとし，$B\Gamma$ は Δ に等しい数，$BE, EZ, Z\Gamma$ に分割されるとせよ。

さて，Δ は A を割り切るから，Δ は A の部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$）である。

しかし，Δ は $BE,\ EZ,\ Z\Gamma$ それぞれの数に等しい。したがって，$BE, EZ, Z\Gamma$ それぞれの数もまた A の部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$）である。だから，$B\Gamma$ は A の諸部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$）である。

(1)における証明の要点は，互いに素である2数 $n,\ m\ (n>m)$ を単位にまで分割する（定義13を参照）とき，m は，n の $\dfrac{1}{n}$ を $m,\ n$ に共通する割り切りの尺度として，換言すれば部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$）として，$\dfrac{1}{n}\times m$ つまり諸部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$）になるということである（定義4を参照）。

(2)における証明の要点は，互いに素でない〔＝合成数，定義15を参照〕2数 $n,\ m\ (n>m)$ について，

①m が n を割り切るならば，m を割り切りの尺度として部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$）であり（定義3，5を参照）

②m が n を割り切らないならば，μ が $n,\ m$ の最大公約数であるとして，$n=a\mu$ で $m=b\mu$ と表現することができる。そのとき m は，μ を割り切りの尺度として $\dfrac{b\mu}{a\mu}\left[=\dfrac{1}{a}\times b\right]$，つまり諸部分（$\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$）になるということである。

わたしが前節で例示した(i)は上の(2)の①に，(ii)は(2)の②に，(iii)は(1)に相当するものである。

さて，以上のように見てくると，“$\mu\acute{\epsilon}\rho o\varsigma$”と“$\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$”に関する『原論』第7巻定義におけるユークリッドの論点が，数相互間の「割り切り」（$\kappa\alpha\tau\alpha\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\eta\sigma\iota\varsigma$）とその尺度（$\mu\acute{\epsilon}\tau\rho o\nu$）の問題を中心にしていることは明白だと思われる。そしてその尺度を，ユークリッドは，上述のように3つの場合にわけて区別したのである。そしてその3つの場合とは，

(1) 大小2数 $n,\ m\ (n>m)$ について，$n=am$ となっている場合（定義5を参照）
(2) 大小2数 $n,\ m\ (n>m)$ について，$n,\ m$ の最大公約数を μ として，$n=a\mu,\ m=b\mu$ となっている場合（定義15を参照）
(3) 大小2数 $n,\ m\ (n>m)$ について，$n,\ m$ が互いに素である場合（定義13を参照）

であったわけである。だからこそユークリッドは定義21において，

> Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ἢ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

第1の数が第2の数の，第3の数が第4の数の同数倍であるか，同じ部分であるか，同じ諸部分かであるとき，それらの数は等比である。

という複雑な言い回しをしなければならなかったのである。

さて，当初の問題に帰って結論を述べるならば，共立出版の『原論』における原語“μέρη”に対する「約数和」なる訳語は，伊東氏の与えた解釈の下では完全な誤訳だと言ってよいということになる。しかし別のいっそう一般的な，そして伊東氏の解釈を離れた新しい解釈の下では，必ずしも誤訳だとは言い切れない側面をもつ。何故ならそれは，ヒースの線に沿ってわたしが与えた解釈においても，もしも“μέρος”を「約数」と訳してもいいとするならば［そして，そのことは可能である］，上の(2)(3)の場合についてわたしが例示したように，「約数［複数］［の和］」を意味しうる側面をもつからである。が，しかし，おそらくは，「約数和」という耳慣れない訳語は，それが体系的誤解を招く可能性をもつものであるゆえに，避けられてしかるべきものであったであろう。

1993・7・18　信州上田城下にて

追記　本研究は，日本私学振興財団の平成4年度および5年度の学術研究振興資金を得て行なわれた研究の一部である。