〔共同研究：19世紀の科学と文化〕

Issac Todhunter について

安藤洋美

1. 19世紀中ごろまでの科学の進歩について，勝れた綜合報告を書いたのはアイザック・トドハンターである。変分法史，確率論史，引力論史，弾性論史は彼の不朽の名作であるが，なぜか我が国ではいままで紹介されていなかった。今回，引力論史の一部が後藤邦夫教授により，弾性論史が並川宏彦教授ら数人の方々により邦訳されて紹介されることになり，19世紀の科学史研究は大幅に進歩することになった。さらに後述するように，弾性論史はカール・ピアソンとの共著ともいうべき性格のもので，カール・ピアソンを媒介として，吾々は進化論，集団遺伝学，生物測定学，優生学など松永俊男助教授の研究とも連結しうることになり，桃山学院大学のスタッフの諸研究を集大成すれば，壮大な19世紀科学史が姿を見せる筈である。本稿ではそのような諸研究の接点に立つトドハンターについて若干の考察を試みてみたい。

2. アイザック・トドハンターの生涯と研究について吾々の利用できる記事は以下に列挙する通りである。

(1)H. J. S. Smith のロンドン数学会会長就任演説『*On the present state and prospects of some branches of pure mathematics*』(Proceedings London Mathematical Society, Vll, 1876—77年, p. 6—29)

(2)Robert Turner によるロンドン数学会の死亡記事 (Proceedings London Mathematical Society, XIV, 1882—83年, p. 284—287)

(3)E. J. Routh による王立協会の死亡記事 (Proceedings Royal Society of London, XXXVII, 1884年, p. xxvii—xxxii)

(4)Alexander Macfarlane『*Lectures on ten British mathematicians of the Nineteenth Century*』(N. Y. Wiley, 1916年, p. 134—146)

(5)M. G. Kendall『*Issac Todhunter's History of the Mathematical Theory of Probability*』(Biometrika, L, 1963年, p. 204—205)

(6)Churchill Eisenhart『*Centennials of the Publication of Todhunter's "History of the Mathematical Theory of Probability"*』(American Statisticians, *XIX*, 1965年, p. 23—24)

(7)Dictionary of National Biography (XIX, 1901年, p. 914—915；J. B. M. の署名あり)

(8)Encyclopedia Americana (XXVI, p. 668；執筆者の署名なし)

(9)Dictionary of Scientific Biography (XIII, p. 426—428：Margaret E. Baron による記事)

その他，いろいろな数学史の書物の中に，人名だけ，もしくは数行の記事が出ている。なお，Encyclopedia Britanica の旧版にはあるかもしれないが，最近の数種の版 (1963年版，1979年版) にはトドハンターの記事は載っていない。

以上の典拠をもとにして，トドハンターの生涯を辿ってみよう。

アイザック・トドハンターは1820年11月23日イングランド東サセックス州ルュエ (Rye) に生れ，1884年3月1日イングランド・ケンブリッジで死去した。父は組合派教会 (Congregation Church) の牧師ジョージ・トドハンター (George Thdhunter)，母はメアリー・ヒューム (旧姓，Mary Hume)，この両親の間に4人の息子が生れ，アイザックは次男であった。アイザック6才の1826年に父は死に，母と4人の息子は貧困のなかに残された。母はヘイスチン

グ (Hastings) に転居し，そこでお針の学校を開いた。アイザックはヘイスチングでロバート・カル (Robrt Curr) が開いていた私立学校に入れられたが，そこでは勉強のできない超遅進児 (unusually back-ward child)，今風にいうと落ちこぼれで，将来の卓越ぶりなど想像しうべくもなかったという。結局，カルの私塾を追出され，新しくロンドンからやってきたオースチン (J. B. Austin) の開いた学校に転校した。このオースチンの指導がよかったのか，合性がよかったのか，ともかく彼はこの学校で急速に成績を向上させ，生涯を決定的なものにした。ロンドン区ペッカム (Peckham) の学校にオースチンが移ると一しょに，トドハンターもその学校の助教に採用された。それと同時に（ロンドン西中央郵便局区1）ガウアー街にあるユニヴァーシティ・カレジの夜学部の学校に登録された。トドハンターはペッカムの学校での勤務のあと，毎晩5哩 (約8km) の道を徒歩通学してカレジに通う文字通りの苦学生だった。当時ユニヴァーシティ・カレジはイギリス国教会の39の信仰個条を唱えることなく，学士号と修士号をとることのできるイングランド唯一の高等教育機関だった。このカレジで彼は3人の語学教師と2人の数学教師から大きな影響を受けた。彼が語学に堪能で古典語やヘブライ語の文献を自由に読めるようになったのは主としてキー (Thomas Hewitt Key)[1]，マルデン (Henry Malden)[2] 両教授のお蔭であり，また数多くの練られた数学啓蒙書や教科書の執筆などジャーナリスチックな生涯を送ったのはロング (George Long)[3] 教授の影響と思われる。またシルヴェスター (James Joseph Sylvester) について物理学，ドモルガン (Augustus de Morgan) について論理学，純粋数学，確率論を勉強した。1839年トドハンターはロンドン大学入学試験で数学が1位だったので，2年間30ポンドの奨学金を貰えた。1842年文学士 (B. A.) となり，3年間50ポンドの数学奨学金を獲得し

1) Thomas Hewitt Key (1799. 3. 20—1875. 11. 29) 600年続いた名家の出，ロンドンの医師 Thomas Key とその後妻 Mary Lux Barry の間の子，外科医 Charles Aston Key は異母兄，1817年ケンブリッジ St. John's College 入学，19年 Trinity College に移籍，21年 B. A. (19位)，24年 M.A.，21—24年の間父の希望でケンブリッジと Guy's Hospital で医学を勉強。1824年7月 U. S. A. ヴァージニア大学の教授を選ぶためにケンブリッジに来ていた米人 Francis W. Gilmer と会い，純粋数学教授を委嘱されて渡米。25年4月から27年秋までヴァージニア大学で教えたが，米国の気候になじめず辞職。古典語の研究を始めたのはアメリカ在住時代のこと。28年秋新設のガウアー街の University College のラテン語教授に指名された。1842年比較文法の教授（無給）になったのでラテン語教授を辞職した。1833年 St. John's 時代の同級生だった Henry Malden とともに University College School の校長に指名され，42年 Malden の辞任で以後死ぬまで単独校長となる。校長としては学校の教育課程に自然科学を取り入れ，教授としては古典語の crude-form system を提唱した。著書『ラテン語入門』(1846年)。

2) Henry Malden (1800—1876. 7. 4.) は Putney の外科医 Jonas Malden の4男。1818年ケンブリッジ Trinity College 入学。1821年 Macauley や Long とともに総長賞を貰った。22年 B. A.，24年 Trinity の fellow に選出され，25年 M. A. を受く。31年ロンドン University College のギリシャ語教授 (76年辞任)。36年 University College がロンドン大学の一カレジに昇格するため目ざましい活躍をした。33年—42年 Key と一しょに University College School の校長。著書『前390年までのローマ史』(1830年)。死後の78年遺産で Malden 賞（約20ポンド）が設けられた。

3) George Long (1800. 11. 4—1879. 8. 10) は商人 James Long の長子。Macclesfield の文法学校で教育を受け，1818年ケンブリッジ Trinity College 入学。21年 Macauley (卿) や Malden とともに Craven 奨学生となる。22年 B. A.，24年 Key とともに米国ヴァージニア大学の古代語教授となり渡米。学長 Jefferson (後の大統領) と親交を結ぶ。1828年10月1日ロンドンに開校された University College のギリシャ語教授として帰国。31年辞任して "Quarterly Journal of Education" (全10巻にまとめ，31—35年) の主筆となる。30年王立地理学協会の設立に参加，46—48年に同協会名誉総裁となる。『Penny Cyclopedia』29巻 (1833—46年) の編集にあたる。1842年友人 Key の後任として University College のラテン語教授に帰り咲いたが，46年辞任。しばらく法曹学院 (Inner Temple) で法律学と市民法を教えた。当時ローマ法に関しては Long の右に出る者はなかった。49年から71年まで Brighton College の古典学講師。『古代地図帖』(1854年)，『ローマ法に関する2つの論説』(1847年)，『マルクス・アウレリウス帝の考え』(1862年)，『ローマ帝国の衰亡』(全5巻，1864—74年)，その他ガリヤ戦記などのグラマ・スクール用教科書も多数出版した。

た。1847年ギリシャ語の聖書とヘブライ語の研究で文学修士 (M. A.) 号をとり，この修士試験では最高得点者に与えられる金賞を得た。修士号を受けるまでの2年間，ストットン (Stoton) とメイヤー (Mayer) 両氏の経営するウイムブレドン (Wimbledon) の学校の数学教師の職につき，一所懸命貯金をしていたという。1844年，師のドモルガンの示唆により，ケンブリッジに入り，セント・ジョンズ・カレジにおいて数学優等生試験 (Tripos) を受けるコースを登録した。彼は他の学生より年をくっていた (24才) が，優等生試験には合格するだろうと噂された。同じ学年には数学以外の優等生試験をめざすものも多くいたし，それで彼は数理電気学のような規則に定められていない題目の講義を聴いたりして時間つぶしをしたという。1848年2回目の B. A. をケンブリッジでとり，数学優等生試験では第1位，また最初のスミス賞を得た。また同じ48年に『神の摂理の理論は，絶対的に完全なる創造主の存在において，信仰と不可分なること』と題する随筆でバーネイ賞 (Burney prize) を得た。この賞は“いくつかの道徳的もしくは形而上学的題目について，実在と自然と神の表象について，キリスト教の真理と証験について”書かれた最良の英文随筆を，学士号所得後3年以内に書いた人に対して与えられるものである。この随筆でトドハンターは他の多くの数学者と同じように，神学的論理と数学的論理は別々の精神的カテゴリーの中にあって，互いに矛盾しあうことなく，両立しうることを述べている。1849年トドハンターはセント・ジョンズ・カレジの特別研究員 (fellow) に選出され，以後15年間そこで個人指導や講義や著作や試験に専念した。この15年間に，彼は自分の講義題目について教科書を書き，Text-Book Maker の異名をとるに至った。それらを以下に列挙する。

i) 『*A Treatise on the Differential Calculus with numerous examples*』(1852年，第5版1871，リプリント；1873，75，78，81，85，90，1901，1907年)

ii) *A Treatise on Analytical Statics*』(1853年，第4版1874年)

iii) 『*A Treatise on the Integral Calculus with numerous examples*』(1857年，第5版1878年，リプリント；1880，83，86，89，91，95，1906年)

iv) 『*A Treatise on Algebra from the use of Colleges and Schools*』(1858年，第6版，1871年，リプリントを入れると15〜16版)

v) 『*A Treatise on plane Co-ordinate Geometry*』(1858年，第3版1861年)

vi) 『*Examples of Analytical Geometry of Three Dimenions*』(1858年，第3版1873年)

vii) 『*Plane Trigonometry for the Use of Colleges and Schools*』(1859年，リプリント60，64，69，74，76，78，80，82，84，85，88，90，95，1903年)

viii) 『*A Treatise on Spherical Trigonometry for the use of Colleges and Schools, with numerous examples*』(1859年，第5版1886年)

ix) 『*The Theory of Equations*』(1861年，第2版，1875年)

x) 『*The Elements of Euclid for Colleges and Schools*』(1862年，最終的には16版，Everyman Library No. 891 に収録)

xi) 『*Trigonometry for beginners, with numerous examples*』

xii) 『*A Treatise on Conic Sections, with numerous examples*』

xiii) 『*Algebre for beginners, with numerous examples*』

xiv) 『*Mechanics for beginners, with numerous examples*』(1867年)

xv) 『*Mensuration for beginners, with numerous examples*』1869年，

なお上記の教科書群のうち，i)，iii)，iv)，vii)，viii)，ix)，x)，xi)，xiii)，xiv) については，書物の中の問題を解答した虎の巻に相当する『*Key to*…』と称するものが出版されている。たとえば

『*Key to plane trigonometry*』(1874年，リプリント，77，78，79，80，82，83，85，86，

88, 90, 93, 1906年）という具合である。

これらの書物は問題演習も含めて，明治14年から20年にかけて，長沢亀之助（1860—1927）らにより邦訳されている[4]。

3. トドハンターは1862年王立協会会員に選出されている。1864年8月13日，彼はルイザ・アンナ・マリア（Louisa Anna Maria）と結婚した。妻マリアはのちに提督となったイギリス海軍大佐ジョージ・ディヴィス（George Davis）の長女であった。この結婚のため，彼はカレジの特別研究員（fellow）を辞職した。この職は宗教的理由によりカレジに寄寓する独身男性に限られていた。婚約中，〝私はいつも学徒だったし，今後もまた学徒たりつづけるだろう，と思っていてほしい。だからといって書物の方がお前より可愛いとはいわないよ〟とマリアにラブレターを書いたという。だが新婚旅行中もハミルトン（William Hamilton）の『四元数』を携帯して読んでいたというから，根っからの本の虫だったのだろう。この結婚で4男1女が生れ，家庭生活は非常に幸福だったと思われる。家にはカナリヤと猫が飼われていたが，彼が動物好きだったかどうかは不明である。

1864年ロンドン数学会（London Mathematical Society）が設立され，トドハンターは創設委員ではなかったが会員に選出された。1869年の終りごろにはロンドン大学の試験委員になった。1871年から73年にかけて王立協会の顧問（Council），1874年にはセント・ジョンズ・カレジの名誉特別研究員（honorary fellow）に選出された。1878年にはインド勤務文官（Indian Civil Service Commission）の試験官であった。

セント・ジョンズ・カレジの研究員をやめてのち，トドハンターは

xvi) G. ブール（Boole）の『*A Treatise on Differential Equations*』(1865年）の編集，長沢亀之助の邦訳は明治18年（1885年）

xvii)『*An elementary Treatise on Laplace's, Lame's and Bessel's Functions*』(1875年)

xviii)『*Natural Philosophy for Beginners*』(全2巻，1877年——第1巻では剛体，流体の識性質，第2巻では音，光，熱の諸性質を論ずる）のような教科書もしくは入門書を書いてはいるが，彼の全精力は後世に残る仕事，つまり

4) 長沢亀之助によるトドハンターの翻訳は次の表の通りである。解式とは演習書のことである。なおvii) は明治10年田中実の訳で全2巻本が出ている。また v）の訳は上野清により明治14年7月『軸式円錐曲線法』として，またこの本の中の問題解答を翻訳ではなく1冊の演習書として向井嘉一郎が『軸式円錐曲線法例題解式』として明治16年4月に出版した。さらに x）については柴田清亮により，明治10年ごろ翻訳が出ている。

原著の番号	訳書名	発行年月（明治）	左記の本の『Key to ……』の訳書名	発行年月（明治）
i)	微分学	14年11月	微分学例題解式	17年6月
iii)	積分学	15年4月	積分学例題解式	不明だが38年には出版されている
iv)	代数学	16年1月	代数学例題解式	18年5月
vii)	平面三角法	16年6月	平面三角法例題解式	18年9月
viii)	球面三角法	16年8月	（球面三角法例題解式*）	18年10月
x)	ユークリッド（宥克立）	17年1月	宥克立例題解式	17年10月
ix)	論理方程式	17年7月	（論理方程式例題解式*）	19年3月
xvi)	ブール微分方程式	18年1月		

* は市東佐四郎の著述による。

4冊の史書の執筆と1冊の個人全集の編集に向けられた。

xix)『*A History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*』(1861年, XVI+*532 p.* Dover 版 *1948*年)

xx)『*A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*』(1865年, *XVI+624 p.* Dover版. 1965年) ——邦訳, 安藤洋美訳『確率論史, パスカルからラプラスまでの数学史の一断面』(現代数学社, 1975年)

xxi)『*A History of Mathematical Theory of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace*』(全2巻, 1873年, *XXXVI+1008 p.* Dover版 1962年) ——一部邦訳, 後藤邦夫, 田村祐三；〝現代数学〟1976年5月号から1977年9月号まで12回にわたり, 第1巻1項から199項まで, 原書102頁分が翻訳されている。

xxii)『*William Whewell.*[5] *An Accont of His Writings with Selections from his Literary and Scientific Correspondence*』(全2巻1876年, 第1巻は *XXXVIII+708* p, 第2巻は *XIV+679 p.*)

xxiii)『*A History of the Theory of Elasticity and of Strength of Materials, from Galilei to the Present Time*』(遺稿) この最後の本はケンブリッジ大学出版部の依頼で, カール・ピアソンに完成がゆだねられた。ピアソンの補筆は遺稿の2倍に及んだ。第1巻 (*XIV+924 p.*) は1886年, 第2巻 (*X+1308 p.*) は1893年に出版された。Dover 版は1960年に出版された。現在この邦訳は並川宏彦・村上一男・村上一実・大南正瑛各氏により進行中, 1巻1章133項までは大阪産業大学論集(自然科学編) 61号 (1980.7), 62号 (1980.10), 63号 (1981.3) に収録されている。

史書4部作 xix), xx), xxi), xxiii) は極めて百科全書的に書かれているとの悪口も吐かれている。また xx) xxi) はラプラスの『確率の解析的理論』や『天体力学』の註釈本ともみなされている。しかしこれらの史書が価値ありとされるのは, 第1に当時の史料学の手法を取り入れ陳述史料を網羅した最初の数学史料解題であること, 第2は史料の本源性の批判を行なっている (史料の originality を確かめる) こと, 第3に陳述されている内容の可信性を判定している点にある。そのゆえにモンチュクラ (Montucla) の『数学史』(1802年) のように物語的歴史 (Erzählende Geschichte) にもならず, ベル (Bell) の『数学を作った人々』(1937年) のように教訓的歴史 (Lehrhafte Geschichte) にもなっていない。それは完全に発展的歴史 (Entwickelunde Geschichte) の記述になっている。現在これらの史書を再び取り上げる理由は, 現代科学の知識をもとにして史料に内的批判を加えんがためである。

これらの史書の執筆の途中で出会った諸問題を, トドハンターは論文にまとめた。まず『**変分計算についての研究** (*Researches in the Calculus of Variation*)』(Philosophical Magazine, 第4シリーズ, 28巻, 1865年) という変分法の解の中における不連続性の問題を論じた論文に対し, 1871年王立協会のアダム賞が授与された。また確率論において『**最小二乗法について** (*On the method of Least Squares*』(Transactions of the Cambridge Philosophical Society, *XI*, 1869年, p. 219—238) なる論文を発表している。これは1865年5月29日ケンブリッジ哲学会で口頭発表されたものである。この論文は**ラプラス**の『**確率の解析的理論**』の**第1補遺** (1815年) の中で, 証明なしで発表された結果：3量 x, y, z があり, その観測値をそれぞれ x_1, y_1, z_1 とする。

$$x=x_1+\xi,\ y=y_1+\eta,\ z=z_1+\zeta$$

誤差 ξ, η, ζ が同時に存在する確率は

$$\exp\{-\frac{1}{4\kappa^2}\sum(a_i\xi+b_i\eta+c_i\zeta)^2\}$$

に比例する：ことを証明し, ラプラスの結果をさ

5) William Whewell (1794.3.24—1866.3.6) は科学史, 科学哲学, 天体物理学, 科学教育の専門家。『帰納科学の歴史』(全3巻, 1837年) の著者として有名。

らに多変数の場合にも拡張している。[6]

4.　確かにトドハンターは独創的な数学者ではなかったかもしれない。しかしラテン語，ギリシャ語，ドイツ語，フランス語，スペイン語，イタリア語，ヘブライ語，梵語に通暁していたことは，上記のような史料考証を主にした研究には最適任者であった。時代も俗に〝歴史の世紀〟と呼ばれる程，人々の史的な関心が高くて，成果を発表しやすい雰囲気にあったのかもしれない。ランケやギボンの著名な史書が出版されたことにトドハンターは刺戟されたものと思われる。

ところで，Text-Book Maker としてのトドハンターは19世紀の数学の３分野，代数・解析幾何の区分をかたくなに固守し，それらを融合することに反対した。なかでも『ユークリッド原論』に算術・代数が導入されることに反対した。そのために彼は幾何教育をめぐる論争にまきこまれた。当時，public school で教えられていた幾何学はシムソン (Robert Simson) の『*Elements of Euclid*』(1756年) であった。これはユークリッド原本のⅠ—Ⅵ巻，Ⅺ巻，Ⅻ

---

6) この問題提起は論文の §3 でなされている。§6 では三重定積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u)\cos(H_1x_1+H_2x_2+H_3x_3)$$
$$\times dx_1\,dx_2\,dx_3=\sqrt{\pi^3}\exp(-v/4)/\sqrt{D} \qquad (1)$$

であることを証明している。ただし H_1, H_2, H_3 は定数，v は x_1, x_2, x_3, の２次の非負同次関数

$$v=A_1x_1^2+A_2x_2^2+A_3x_3^2+2B_1x_2x_3+2B_2x_3x_1+2B_3x_1x_2$$

である。そして $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, は

$$\begin{cases} H_1=\lambda_1A_1+\lambda_2B_3+\lambda_3B_2 \\ H_2=\lambda_1B_3+\lambda_2A_2+\lambda_3B_1 \\ H_3=\lambda_1B_2+\lambda_2B_1+\lambda_3A_3 \end{cases} \qquad (2)$$

によって決定される定数，v は

$$v=A_1\lambda_1^2+A_2\lambda_2^2+A_3\lambda_3^2+2B_1\lambda_2\lambda_3+2\mathrm{B}_2\lambda_3\lambda_1+2B_3\lambda_1\lambda_2$$

で，D は行列式

$$D=\begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

である。§7 では §6 で与えられた積分が n 個の変数の場合にも拡張できることを述べ，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u)$$
$$\times\cos(H_1x_1+H_2x_2+\cdots+H_nx_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n \qquad (10)$$

の値を求めている。ただし $H_1, H_2,\cdots, H_n$ は定数，v は $x_1, x_2\cdots, x_n$ の負ならざる２次の同次関数であり，x_r^2 の係数を $A_{r,r}$，x_rx_s の係数を $2A_{r,s}=2A_{s,r}$ と表わす。結果は §6 と同じ形式で

$$\sqrt{\pi^n}\exp(-v/4)/\sqrt{D}$$

で表わされる。ここで v は

$$H_r=\lambda_1A_{1,r}+\lambda_2A_{2,r}+\cdots+\lambda_nA_{n,r}$$
$$(r=1,2,\cdots,n) \qquad (11)$$

を満す $\lambda_1, \lambda_2,\cdots,\lambda_n$ を v の $x_1, x_2,\cdots,x_n$ の代りに置きかえた式；Dは行列式

$$D=\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1}, & \cdots, & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots, & A_{n,2} \\ \cdots\cdots & & & \\ A_{1,n} & A_{2,n}, & \cdots, & A_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (19)$$

である。トドハンターはこの求積を数学的帰納法で出している。同様に数学的帰納法を用いて，§8 では$D>0$であることを証明している。§9 では重積分

$$R=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_1\exp(-u)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$
$$=\sqrt{\pi^{n-1}}.\sqrt{D_1}/2D$$

を求める。v は §7 の関数と同じ，D_1 は(19)式の行列式Dから第１行と第１列を除外した行列式である。§10：s 個の観測値があり，それらの誤差を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s$ で表わす。それらの誤差の重みづきの和

$$E_p=p_1\varepsilon_1+p_2\varepsilon_2+\cdots+p_s\varepsilon_s$$
$$E_q=q_1\varepsilon_1+q_2\varepsilon_2+\cdots+q_s\varepsilon_s$$
$$E_r=r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2+\cdots+r_s\varepsilon_s$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

が r 個作られたとする。α, β を整数値とし，$\beta<\alpha$, $\beta\omega\leqq\varepsilon_i\leqq\alpha\omega$ と仮定する。$\beta\leqq n\leqq\alpha$ なる整数値があって，第 i 番目の観測で $n\omega=\varepsilon_i$ となるチャンスを $\mathrm{F}(n, i)$ で表わす。この節の問題は $E_p, E_q, E_r,\cdots$ が同時に指定された値をもつであろう確率を求めることが提起される。$1\leqq i\leqq s$ に対し，$wp_i, wq_i, wr_i,\cdots$がすべて整数であるような因数を w とする。

$$wE_p=m_p\omega,\ wE_q=m_q\omega,\ wE_r=m_r\omega,\cdots \qquad (24)$$

が同時に成立するであろう確率は，ある s 個の因数の積Xにおける項

$$U^{m_p\omega}\ V^{m_q\omega}\ W^{m_r\omega}$$

の係数に等しい。各因数は $\alpha-\beta+1$ 項の級数からなり，第番目の因数の一般項は

$$F(n, i)\,U^{wp_in\omega}\ V^{wq_in\omega}\ W^{wr_in\omega}\cdots,$$

ただし $n=\beta, \beta+1,\cdots,\alpha$

によって表わしうる。

U^ω の代りに $\exp(\Theta\sqrt{-1})$, V^ω の代りに $\exp(\Phi\sqrt{-1})$, W^ω の代りに $\exp(\psi\sqrt{-1})$，…とおく。そのとき,(24)式がすべて成立する確率は

$$\frac{1}{(2\pi)^r}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots X\exp\{-m_p\Theta+m_q\Phi+m_r\psi+\cdots)\sqrt{-1}\}\,d\Theta\,d\Phi\,d\Psi\cdots$$

に等しい。ω は無限小，$\alpha-\beta$ は限りなく大きいと仮定し，

$$m_p\omega=\mu_pw,\ m_q\omega=\mu_pw,\ m_r\omega=\mu_rw,\cdots$$
$$w\Theta=\omega\theta,\qquad w\Phi=\omega\varphi,\qquad w\Psi=\omega\psi,\cdots$$

巻で，〝ユークリッドに戻れ〟という趣旨で書かれたものだった。ところがブラックロック (Blacklock) の『*Elements of Euclid*』(1827年) が極端な記号主義の本として，一方ポッツ (Robert Potts) の『*Euclid's Elements of Geometry*』(1845年, 2nd ed. 1861年) はユークリッドに忠実に，しかも冗長な文章表現の本として，いずれも両極端なテキストを代表していた。ポッツの本は各巻の終りに算術・代数的註釈，最後に大学入試問題の解答と索引をのせ，当時としては至れり尽せりの本ではあった。イギリスの幾何教育はこの両者の間で揺れ動いた。幾何の特殊性を破壊するからといって，ドモルガンは代数と幾何の融合に反対した。師を尊敬すること，崇神に近かったトドハンターはドモルガンに賛同し，加えて形式論理学の訓練と応用の場としてユークリッド原本に固執した。記号論理の発達していなかった当時としてはこれは卓見である。ユークリッドに代る論理訓練の場はなかった。"it is extremely improbable, if Euclid were once abandoned, that any agreement would exist as to the author who

---

とおく。すると上の積分は

$$\left(\frac{\omega}{2\pi w}\right)^{r}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots X\exp\{-(\mu_p\theta+\mu_q\varphi+\mu_r\psi+\cdots)\sqrt{-1}\}\,d\theta\,d\varphi\,d\psi\cdots$$

となる。$\omega/w=d\mu_q,\ d\mu_q,\ d\mu_r,\cdots$ とおくと，

$$\mu_p\leqq E_p\leqq\mu_p+d\mu_p$$
$$\mu_q\leqq E_q\leqq\mu_q+d\mu_q$$
$$\mu_r\leqq E_r\leqq\mu_r+d\mu_r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

をうる確率は

$$\frac{d\mu_p d\mu_q d\mu_r\cdots}{(2\pi)^{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots X\exp(-\eta\sqrt{-1})\times d\theta\,d\varphi\,d\psi\cdots \tag{25}$$

ただし，$\eta=\mu_p\theta+\mu_q\varphi+\mu_r\psi+\cdots$ である。ω は無限小量と仮定しているから，あらゆる観測値における誤差は無数にある値のどれか1つであり，そのおのおのの値をとるチャンスも限りなく小さくなる。$\alpha\omega\equiv a,\ \beta\omega\equiv b,\ n\omega\equiv t$ とおき

$$U^{wp_i n\omega}\ V^{nq_i n\omega}\ W^{wr_i n\omega}\cdots$$
$$=\exp\{t(p_i\theta+q_i\varphi+r_i\psi+\cdots)\sqrt{-1}\}$$
$$F(n,\ i)\equiv\omega f_i(t)=dt\ f_i(t)$$

これからXにおける第 i 番目の因数は

$$\mathrm{Q}_i\equiv\int_b^a f_i(t)\exp\{t(p_i\theta+q_i\varphi+r_i\psi+\cdots)\times\sqrt{-1}\}\,dt$$
$$\equiv\rho_i\exp(\nu_i\sqrt{-1})$$
$$Y=\rho_1\rho_2\cdots\rho_s$$
$$\sigma=\upsilon_1+\upsilon_2+\cdots+\upsilon_s$$

とおくと，$X=Y\exp(\sigma\sqrt{-1})$. これらを(25)式に代入し，正弦関数が奇関数であることから

$$\frac{d\mu_p d\mu_q d\mu_r\cdots}{(2\pi)^{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots Y\cos(\eta-\sigma)\times d\theta\,d\varphi\,d\psi.\cdots \tag{26}$$

§11 ではポワソンによる近似式を(26)式に代入することを説明する。(ポワソン『**刑事事件，民事事件の判決の確率についての研究**』(1837) 第4章§101；安藤洋美『古典確率論発展史(29)ポワソン (vii)』1981年1月，Basic 数学，参照)

$$p_i\theta+q_i\varphi+r_i\psi+\cdots\equiv\tau_i$$ とおく。

$$\int_b^a t\,fi(t)\,dt=k_i\ ,$$
$$\int_b^a t^2 f_i(t)\,dt=k_i{}'\ ,$$
$$\int_b^a t^3 f_i(t)\,dt=k_i{}'',$$

とおき，さらに Q_i の展開式から収束級数

$$\rho_i\cos\upsilon_i=1-\frac{\tau_i{}^2k_i{}'}{2!}+\frac{\tau_i{}^4k_i{}'''}{4!}-\cdots$$
$$\rho_i\sin\upsilon_i=\tau_ik_i-\frac{\tau_i{}^3k_i{}''}{3!}+\cdots$$

をうる。$\frac{1}{2}(k_i{}'-k_i{}^2)\equiv h_i{}^2$ とおくと，

$$\rho_i\doteqdot1-\tau_i{}^2h_i{}^2$$
$$\upsilon_i\doteqdot\tau_ik_i$$

を得，

$$\left.\begin{aligned}Y&=\exp(-\textstyle\sum\tau_i{}^2h_i{}^2)\\ \sigma&=\textstyle\sum\tau_ik_i\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

が(26)式に代入される。

§12 は以上の準備段階を用いて，問題の解にせまる。r 個の要素からなる関数値が多数の観測値を用いて決定されるものとする。第 i 番目の観測値により決定されるこの関数値を M_i，その近似値を L_i, 各要素は小さな補正を要し，それらの補正値を x, y, z とすると

$$M_i+\varepsilon_i=L_i+xa_i+yb_i+zc_i+\cdots$$

となる。ε_i は未知の誤差である。$M_i-L_i\equiv g_i$ は関数の近似値を上まわる観測値の超過量である。かくして

$$\varepsilon_i=xa_i+yb_i+zc_i+\cdots-g_i \tag{28}$$

(ε_i は未知；$a_i,\ b_i,\ c_i,\cdots,\ g_i$ は既知) この式から最良の $x, y, z,\cdots$ を得ることが目的である。(28)式に任意の因数 p_i を掛け，すべての i について加える；再び(28)式に任意の因数 q_i を掛け，すべての i について加える，等々。こうして r 個の方程式系

$$\left.\begin{aligned}\textstyle\sum p_i\varepsilon_i&=x\textstyle\sum p_ia_i+y\sum p_ib_i+z\sum p_ic_i+\cdots\\ \textstyle\sum q_i\varepsilon_i&=x\textstyle\sum q_ia_i+y\sum q_ib_i+z\sum q_ic_i+\cdots\\ \textstyle\sum r_i\varepsilon_i&=x\textstyle\sum r_ia_i+y\sum r_ib_i+z\sum r_ic_i+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{29}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

このような r 個の任意の乗数 $p_i,\ q_i,\ r_i,\cdots$ の一番有利な値を求めたい。(29)式の左辺の最確値をそれぞれ $\mu_p,\ \mu_q,\ \mu_r,\cdots$ とする；そのとき $x, y, z,\cdots$ は方程式系(29)から決定されるものとする。こうして $x, y, z,\cdots$ として求めた値の正確さの確率の

should replace him."〔(x) の序文〕7) トドハンターの著作物をみれば分る通り，彼の研究の対象は代数や解析学の分野であり，史書にいたっては応用数学的色彩の濃いものであった。数学の正統性を守るためとはいえ，トドハンターの『ユークリッド原本』の教科書を１冊だけ取り上げて，どうしようもない頑固な保守的な考え方の代弁者とみなされ，小倉金之助によって批判されたのは気の毒としかいいようがない。トドハンターは

xxiv)『*The Conflict of Studies and other essays on subjects connected with education*』(1873年) を出版し，イギリスでは論理を無視した闇雲の実験を不当に重視すると批判した。"教師の述べた命題が信じられないような生徒は明白な事を認める能力を持ち合せていない人

推定値を(26)式から得る。(26)式におけるYとσの代りに(27)式を代入すると，定積分(26)は§7で考察した型のものとなり

$$\frac{d\mu_p\, d\mu_q\, d\mu_r \cdots}{(2\pi)^\tau}\frac{\sqrt{\pi^\tau}}{\sqrt{D}}\exp(-v/4) \tag{30}$$

となる：ただしDは $\sum \tau_i^2 h_i^2 = \sum (p_i\theta + q_i\varphi + r_i\psi + \cdots)^2 h_i^2$ の係数により作られる行列式

$$D = \begin{vmatrix} \sum p_i^2 h_i^2 & \sum p_i q_i h_i^2 & \sum p_i r_i h_i^2 \cdots \\ \sum p_i q_i h_i^2 & \sum q_i^2 h_i^2 & \sum q_i r_i h_i^2 \cdots \\ \sum p_i r_i h_i^2 & \sum q_i r_i h_i^2 & \sum r_i^2 h_i^2 \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{vmatrix} \tag{31}$$

である。v は補助量 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ の２次の同次関数，λ_r^2 の係数はDの構成要素の r—r 成分，$\lambda_r \times \lambda_s$ の係数はDの構成要素の r—s 成分の２倍，…である。(11)式をみたす $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ を求めるために，η—σ における係数から

$$H_1 = \mu_p - \sum p_i k_i,\ H_2 = \mu_q - \sum q_i k_i,\ H_3 = \mu_r - \sum r_i k_i, \cdots \tag{32}$$

ととる。(30)式の変数を $\mu_p, \mu_q, \mu_r, \cdots$ から $x, y, z, \cdots$ へ変換すると

$$d\mu_p\ d\mu_q\ d\mu_r \cdots = \triangle dx\ dy\ dz \cdots$$

で，$\triangle$は行列式

$$\triangle = \begin{vmatrix} \sum p_i a_i & \sum p_i b_i & \sum p_i c_i \cdots \\ \sum q_i a_i & \sum q_i b_i & \sum q_i c_i \cdots \\ \sum r_i a_i & \sum r_i b_i & \sum r_i c_i \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{vmatrix} \tag{33}$$

である。さらに v は $x, y, z, \cdots$ の関数に変換されねばならぬ。かくしてこれらの補正値が所与の限界内にある確率は，所与の限界内で，式

$$\frac{\triangle}{(2\pi)^\tau}\frac{\sqrt{\pi^\tau}}{\sqrt{D}}\exp(-v/4)\ dx\, dy\, dz \cdots \tag{34}$$

を積分することによって求められる。

$$x = x_1 + \xi,\ y = y_1 + \eta,\ z = z_1 + \zeta$$

とおき，x_1, y_1, z_1 を方程式

$$\left.\begin{aligned} &\sum p_i k_i = x_1 \sum p_i a_i + y_1 \sum p_i b_i + z_1 \sum p_i c_i \\ &\quad - \sum p_i g_i \\ &\sum q_i k_i = x_1 \sum q_i a_i + y_1 \sum q_i b_i + z_1 \sum q_i c_i \\ &\quad - \sum q_i g_i \\ &\sum r_i h_i = x \sum r_i a_i + y_1 \sum r_i b_i + z_1 \sum r_i c_i \\ &\quad - \sum r_i g_i \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

から決定されるものとする。そのとき(32)式は(29)式と(35)式により

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \xi \sum p_i a_i + \eta \sum p_i b_i + \varsigma \sum p_i c_i \\ H_2 &= \xi \sum q_i a_i + \eta \sum q_i b_i + \varsigma \sum q_i c_i \\ H_3 &= \xi \sum r_i a_i + \eta \sum r_i b_i + \varsigma \sum r_i c_i \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

となる。かつ $dx\, dy\, dz = d\xi\, d\eta\, d\varsigma$，そこで，その諸要素の補正値として x_1, y_1, z_1 を採用するとき，おのおのの補正における誤差が所与の限界内に落ちる確率は

$$\frac{\triangle}{(2\pi)^\tau}\frac{\sqrt{\pi^\tau}}{\sqrt{D}}\exp(-v/4)\ d\xi\, d\eta\, d\varsigma \tag{37}$$

をかかる限界内で積分すれば求められる。v は ξ, η, ς の２次の同次関数として表現できる。補助量 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は (11), (31), (36)式により

$$\left.\begin{aligned} &\sum p_i(a_i\xi + b_i\eta + c_i\varsigma) = \sum h_i^2(\lambda_1 p_i^2 + \lambda_2 p_i q_i \\ &\quad + \lambda_3 p_i r_i) \\ &\sum q_i(a_i\xi + b_i\eta + c_i\varsigma) = \sum h_i^2(\lambda_1 p_i q_i + \lambda_2 p_i^2 \\ &\quad + \lambda_3 q_i r_i) \\ &\sum r_i(a_i\xi + b_i\eta + c_i\varsigma) = \sum h_i^2(\lambda_1 p_i r_i + \lambda_2 q_i r_i \\ &\quad + \lambda_3 r_i^2) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

から求められる。では先の因数 p_i, q_i, r_i に特定の値をあてがう。もっとも便利な因数は

$$p_i = \frac{a_i}{h_i^2},\quad q_i = \frac{b_i}{h_i^2},\quad r_i = \frac{c_i}{h_i^2} \tag{39}$$

である。すると(38)式より

$$\xi = \lambda_1,\ \eta = \lambda_2,\ \varsigma = \lambda_3 \tag{40}$$

となり，(31)式より v における各項の係数は分っているので

$$v = \sum \left(\frac{a_i\xi + b_i\eta + c_i\varsigma}{h_i}\right)^2 \tag{41}$$

をうる。(39)式が成立するとき，$D = \triangle$となり，

$$D = \begin{vmatrix} \sum \frac{a_i^2}{h_i^2} & \sum \frac{a_i b_i}{h_i^2} & \sum \frac{a_i c_i}{h_i^2} \\ \sum \frac{a_i b_i}{h_i^2} & \sum \frac{b_i^2}{h_i^2} & \sum \frac{b_i c_i}{h_i^2} \\ \sum \frac{a_i c_i}{h_i^2} & \sum \frac{b_i c_i}{h_i^2} & \sum \frac{c_i^2}{h_i^2} \end{vmatrix} \tag{42}$$

となる。よって諸要素の補正量として(35)(39)によって与えられる x_1, y_1, z_1 を採用したとき，それらの誤差が所与の限界内におちる確率は

$$\frac{\sqrt{D}}{2^\tau\sqrt{\pi^\tau}}\exp(-v/4)\ d\xi\, d\eta\, d\varsigma \tag{43}$$

をこの限界内で積分した値であることが結論づけられる。なおここでの数式の No. はトドハンターの原論文の式番号をとったので，必ずしも相つづく番号になっていない。

7) トドハンターの『Euclid』は Everyman Library, No. 891 として今も出版されている。シムソン版とトドハンター版の定義，命題などの個数の相違は下記の表の通りである。

間である〟と。かって遅進児と取扱われた人の言としては，いささか物騒な言であるが，しかしこの言は彼のテキストがありきたりのテキストではなく，練りに練られた作品であることを知れば納得できる。さもなければ，トドハンターの教科書類があれ程多くの版を重ねることはできなかった筈だ。人々と論争を好み，滅多に人を賞めることのなかった藤沢利喜太郎ですら，トドハンターの教科書を〝整然たる終始一貫した精神のもとに〟書かれていると称讃している程である。

5. トドハンターの弟子として特定できる人はいない。というのは，彼は私講師 (tutor) として学生たちの優等生試験の準備教育を手伝ったにすぎなかったからである。それでもテイト (Peter Guthrie Tait, 1831. 4. 28—1901. 7. 4) やラウス (Edward John Routh, 1831. 1. 20—1907. 6. 7) らは彼の弟子といわれている。トドハンター晩年の1879年，ストークス，ケイリー，マクスウエルとともに審査したスミス賞対象者の中にカール・ピアソンがいた。彼はピアソンの能力を高く評価した。そのため死後，ピアソンは xxiii) の遺稿の完成をケンブリッジ大学出版部の編集者だった数学者ラウスから任せられ，その任を果したことにより応用数学者としての地位を築いたのである。

1880年眼疾にかかり，続いて全身麻痺がおこり，癈疾の身をケンブリッジ・ブルックサイド (Brookside) 6番地の自宅に横たえたが，84年3月1日死去した。マリア未亡人により，彼の銅版画の肖像と壁にとりつけた記念碑はカレジの前の教会にかかげられた。セント・ジョンズ・カレジの図書館には彼の著書，雑誌論文，死ぬ間際まで書いていた

xxv)『*Arithmetic for beginners*』の原稿など，トドハンター・コレクションがある。

シムソン版の正式の書名は『*The Elements of Euclid : viz the first six books together with the eleventh and twelfth*』(Longman) である。命題 (proposition) を問題と定理に分けている。問題の議論の終りに *Q. E. F.* (quod erat faciendum=which was to be done)，定理の議論の終りに *Q. E. D.* (quod erat demonstrandum=which was to be proved) の略字をのせたのはトドハンター版である。シムソン版の本文欄外の引用命題は，トドハンター版ではもっと詳細に本文内に〔〕付きで挿入されている。

〔追記〕この研究ノートは78, 79年度共同研究〝19世紀の科学と文化〟の一部である。

		シムソン版	トドハンター版	ハイベルク版(原本)
第1巻	定義	35	35	23
	公準	3	3	5
	公理	12	12	8
	命題	1—48	1—48	1—48
第2巻	定義	2	2	2
	命題	1—14	1—14	1—14
第3巻	定義	11	11	11
	命題	1—37	1—37	1—37
第4巻	定義	7	7	7
	命題	1—16	1—16	1—16
第5巻	定義	20	20	28
	公理	4	4	0
	命題	1—25，追加A～Kまで 9	1—25，追加A～Eまで 5	1—25
第6巻	定義	4	4	5
	命題	1—33，追加A～Dまで 4	1—33，追加A～Dまで 4	1—33
第11巻	定義	29，追加A	29，追加A	28
	命題	1—40，追加A～Dまで 4	1—21，付録に3	1—39
第12巻	補題	1	1	0
	命題	1—18	1—1	1—18